

Logiikka I

Åsa Hirvonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

17.2.2014

Malli eli struktuuri

Logiikassa malli on joukko varustettuna jonkinlaisella rakenteella. Malli merkitään jonona

$$\mathcal{M} = (M, \text{mallin rakenteen osat}),$$

missä $M = \text{dom}(\mathcal{M})$ on mallin *universumi*, ja rakenne kuvaa suhteita universumin alkioden välillä, esimerkiksi

$$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \leq)$$

tai

$\mathcal{M} = (\text{salin opiskelijat, tummatukkaiset, villasukkia käytt}$

Unaariset eli yksipaikkaiset struktuurit

Unaarisessa mallissa rakenteen muodostavat yksipaikkaiset relaatiot eli *predikaatit*.

Esimerkki

Tarkastellaan mallia

$$\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, A_2, A_3),$$

missä A_2 koostuu parillisista kokonaisluvuista ja A_3 kolmella jaollisista.

Tällöin mallimme “näkee” seuraavat joukot

$$\begin{array}{ll} A_2 \cap A_3 & (M \setminus A_2) \cap A_3 \\ A_2 \cap (M \setminus A_3) & (M \setminus A_2) \cap (M \setminus A_3) \end{array}$$

Kaksipaikkaiset relaatiot

Kaksipaikkainen relaatio on mikä tahansa M^2 :n osajoukko.

Esimerkki (Järjestysrelaatio)

Järjestysrelaatio on kaksipaikkainen relaatio, joka toteuttaa ehdot:

- (refleksiivisyys) $a \leq a$ kaikilla a ,
- (antisymmetria) jos $a \leq b$ ja $b \leq a$, niin $a = b$,
- (transitiivisuus) jos $a \leq b$ ja $b \leq c$, niin $a \leq c$,
- (totaalisuus) kaikilla a ja b pätee joko $a \leq b$ tai $b \leq a$.

Kaksipaikkaiset relaatiot

Esimerkki (Järjestysrelaatio)

Malli $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \leq)$ on järjestetty joukko,

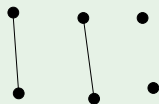
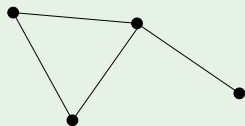
$$\text{dom}(\mathcal{N}) = \mathbb{N},$$

$$\leq = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \leq b\}$$

Kaksipaikkaiset relaatiot

Esimerkki (Verkko)

Verkko koostuu solmuista ja niitä yhdistävistä särmistä.



Kuva: Kaksi verkkoa

Verkko merkitään usein $\mathcal{G} = (V, E)$, missä V on solmujen joukko (vertices) ja E on särmien joukko (edges).

Kaksipaikkaiset relaatiot

Esimerkki

Seuraavat kolme relaatiota ovat kaksipaikkaisia relaatioita maapallon ihmisten joukossa.

$$\textit{Sibling} = \{(x, y) \in M^2 \mid x \text{ ja } y \text{ ovat sisaruksia}\}$$

$$\textit{Dad} = \{(x, y) \in M^2 \mid x \text{ on } y\text{:n isä}\}$$

$$\textit{Mom} = \{(x, y) \in M^2 \mid x \text{ on } y\text{:n äiti}\}$$

Mallit

Malleissa voi olla muutakin rakennetta, useampipaikkaisia relaatioita, vakioita ja funktioita (esim. ryhmän laskutoimitus).

Mallin rakenteen määrää sen *aakkosto*. Aakkosto koostuu

- predikaatti-/relaatio symboleista (yksi- tai usempipaikkaisista) P_0, P_1, \dots tai R_0, R_1, \dots
- funktio symboleista f_0, f_1, \dots
- vakio symboleista c_0, c_1, \dots

L-malli, alustava määritelmä

Määritelmä

Jos L on aakkosto, joka koostuu yksi- ja kaksipaikkaisista relaatio symboleista sekä vakiosymboleista. L -malli \mathcal{M} koostuu

- epätyhjää joukosta M , joka on mallin universumi (= $\text{dom}(\mathcal{M})$)
- universumin osajoukosta P^M , jokaista yksipaikkaista predikaattisymbolia $P \in L$ kohti
- joukon $M \times M$ osajoukosta, jota merkitään R^M , jokaista kaksipaikkaista relaatio symbolia $R \in L$ kohti
- universumin alkioista c^M jokaista vakiosymbolia c kohti

L-malli

Määritelmä

Jos L on aakkosto, L -malli \mathcal{M} koostuu

- epätyhjää joukosta M , joka on mallin universumi ($= \text{dom}(\mathcal{M})$),
- jokaista yksipaikkaista predikaattisymbolia P kohti vastaavasta universumin osajoukosta $P^{\mathcal{M}}$,
- jokaista n -paikkaista relaattisymbolia R kohti vastaavasta joukon M^n osajoukosta $R^{\mathcal{M}}$,
- jokaista vakiosymbolia c kohti vastaavasta universumin alkioista $c^{\mathcal{M}}$,
- jokaista n -paikkaista funktiosymbolia f kohti vastaavasta funktiosta $f^{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow M$.

Predikaattilogiikan kaavojen symboleista

Kahdenlaisia symboleita:

Loogiset symbolit

Muuttujat: x_0, x_1, x_2, \dots (käytännössä usein x, y, z, \dots)

Sulkeet: $(,)$

Konnektiivit: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Kvanttorisymbolit: \forall, \exists

Yhtäsuuruusmerkki: $=$

Ei-loogiset symbolit (Aakkoston L symbolit)

Vakiosymbolit: c_0, c_1, c_2, \dots

Predikaatti-/Relaatioymbolit: P_0, P_1, \dots ja R_0, R_1, \dots
sekä R_0^n, R_1^n, \dots

Funktiosymbolit: f_0^n, f_1^n, \dots

Atomikaavat, idea

Atomikaavat ilmaisevat atomisia ominaisuuksia ja suhteita kuten

- x käyttää villasukkia
- $x = y$
- $x < 10$
- $R_0(x, c)$

Termit (alustavasti)

Objektit, joista atomilauseet puhuvat, ovat *termejä*.
Tässä vaiheessa termejä ovat

- muuttujat
- vakiot

L -atomikaavat

Aakkoston L atomikaavoja muodostuvat seuraavasti:

- 1 Jos t ja u ovat L -termejä, niin $t = u$ on L -atomikaava.
- 2 Jos $R \in L$ on n -paikkainen relaatiosymboli ja t_0, \dots, t_{n-1} ovat L -termejä, niin $R(t_0, \dots, t_{n-1})$ on L -atomikaava.