Logiikka I

Åsa Hirvonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

27.1.2014

Esimerkki

Onko propositiolause p_4 propositiolauseen

$$p_0 \wedge (p_0 \rightarrow p_1) \wedge (p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge (p_3 \rightarrow p_4)$$

looginen seuraus?
Ongelman tutkiminen totuustaululla edellyttäisi taulua, jossa on $2^5 = 32$ riviä!

Päättely

- formaali todistusmenetelmä
- annetuista oletuksista päätellään johtopäätös *päättelysääntöjen* avulla
- formaaleja todistusjärjestelmiä on useita erilaisia, tällä kurssilla käytämme *luonnollista päättelyä*
- päättelyn oikeellisuus helppo tarkastaa, keksiminen vaativaa

Miksi muodollista todistammista?

- voidaan tarkistaa, onko todistus oikein
- voidaan osoittaa, että jotain *ei voida* todistaa

Luonnollinen päättely

- perustuu konnektiivien *tuonti- ja eliminointisääntöihin*
- edellisen askeleen johtopäätöstä voi käyttää seuraavan oletuksena
- pyrkii jäljittelemään ihmisen päättelytapaa
- $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash B$ tarkoittaa: oletuksista $A_1, \ldots, A_n$ voidaan päätellä B, eli on olemassa luonnollinen päättely, jonka johtopäätös on B ja joka käyttää oletuksina korkeintaan propositiolauseita $A_1, \ldots, A_n$

Konjunktion tuonti

Sääntö:

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B} \wedge \mathrm{I}$$

Selitys:
Jos A pätee ja B pätee, niin myös $A \wedge B$ pätee.

Konjunktion eliminointi

Säännöt:

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E \qquad \frac{A \wedge B}{B} \wedge E$$

Selitys:
Jos $A \wedge B$ pätee, niin sekä A että B pätevät.

Esimerkki

Esimerkki

Päätellään $(A \wedge B) \wedge (A \wedge C)$ oletuksesta $A \wedge (B \wedge C)$

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{A \wedge (B \wedge C)}{A}\,\wedge\mathrm{E}
    \qquad
    \dfrac{\dfrac{A \wedge (B \wedge C)}{B \wedge C}\,\wedge\mathrm{E}}{B}\,\wedge\mathrm{E}
  }{A \wedge B}\,\wedge\mathrm{I}
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{A \wedge (B \wedge C)}{A}\,\wedge\mathrm{E}
    \qquad
    \dfrac{\dfrac{A \wedge (B \wedge C)}{B \wedge C}\,\wedge\mathrm{E}}{C}\,\wedge\mathrm{E}
  }{A \wedge C}\,\wedge\mathrm{I}
}{(A \wedge B) \wedge (A \wedge C)}\,\wedge\mathrm{I}
$$

Disjunktion tuonti

Säännöt:

$$\frac{A}{A \vee B}\,\vee\mathrm{I} \qquad \frac{B}{A \vee B}\,\vee\mathrm{I}$$

Selitys:
Jos A pätee, niin $A \vee B$ pätee. Jos B pätee, niin $A \vee B$ pätee.

Esimerkki (disjunktion eliminoinnin idea)

Olkoon n luonnollinen luku. Tällöin $n(n+1)$ on parillinen.
Todistus: n on joko parillinen (eli muotoa $2k$) tai pariton (eli muotoa $2k+1$).

- **Tapaus 1:** n on parillinen, eli $n = 2k$ jollakin $k \in \mathbb{N}$. Tällöin $n(n+1) = 2k(n+1)$, joka on parillinen.
- **Tapaus 2:** n on pariton, eli $n = 2k+1$ jollakin $k \in \mathbb{N}$. Tällöin $n(n+1) = n(2k+1+1) = 2(k+1)n$, joka on parillinen.

Siis $n(n+1)$ on parillinen.

Disjunktion eliminointi

Sääntö:

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{matrix}[A]^1 \\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]^1 \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C} \vee \text{E, } 1$$

Selitys:
Jos tiedämme, että sekä A:sta että B:stä seuraa C, niin tiedämme, että $A \vee B$:stä seuraa C, vaikkemme tiedä, kumpi disjunkteista on voimassa.

Tilapäiset oletukset

- jotkut päättelysäännöt (kuten disjunktion eliminointisääntö) sallivat oletusten *hylkäämisen*
- jos tiedämme, että saamme oletuksen myöhemmin hylättyä, voimme tehdä *tilapäisiä oletuksia*
- kun hylkäämme oletuksen, kirjoitamme hakasulkeet sen ympärille

Negaation eliminointi

Sääntö:

$$\frac{\neg\neg A}{A}\,\neg\,\mathsf{E}$$

Selitys:
Jos A:n negaatio *ei* päde, niin A pätee. Tämä on kolmannen poissuljetun laki.

Negaation tuonti

Sääntö:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]^1\\ \vdots\\ B \wedge \neg B\end{array}}{\neg A}\ \neg\,\mathrm{I},\ 1$$

Selitys:
Jos olettamalla A päädytään ristiriitaan, A ei päde.