Logiikka I

Åsa Hirvonen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

24.1.2014

Käytännön asioita

- Hakekaa paperinne pois!
- Tarkistakaa tähdettömät tehtävät itse - kysykää tarvittaessa neuvoa!
- Lukekaa korjausohjeet!

Totuusfunktio

Määritelmä

Totuusfunktio on funktio $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, jossa $n \in \mathbb{N}$.

Esimerkki

- konnektiivi $\neg$ on yksipaikkainen eli unaarinen totuusfunktio
- konnektiivit $\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ ovat kaksipaikkaisia eli binäärisiä totuusfunktioita

Esimerkki kaksipaikkaisesta totuusfunktiosta

Esimerkki

x	y	$f(x, y)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Esimerkki kolmipaikkaisesta totuusfunktiosta

Esimerkki

x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

Jokainen propositiolause määrittelee totuusfunktion.

Propositiolauseen määrittelemä totuusfunktio

Määritelmä

Jos A on propositiolause, ja A:ssa esiintyvät propositiosymbolit ovat $p_0, \ldots p_{n-1}$, niin A:n määrittelemä totuusfunktio f_A on n-paikkainen funktio $f_A : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, jolla

$$f_A(x_0, \ldots x_{n-1}) = v(A), \text{ kun } v(p_i) = \begin{cases} x_i & \text{jos } i < n \\ 1 & \text{muuten} \end{cases}$$

Jokainen totuusfunktio saadaan jostakin propositiolauseesta.

Propositiolause annetulle totuusfunktiolle

Tarkastellaan seuraavaa totuusfunktiota:

x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

DNF-menetelmä

Jokaista riviä kohden, jossa f saa arvon 1, laaditaan propositiolause, joka on tosi tasan silloin, kun $v(p_0) = x$, $v(p_1) = y$ ja $v(p_2) = z$.

x	y	z	$f(x,y,z)$	
1	1	1	1	$p_0 \wedge p_1 \wedge p_2$
1	1	0	0	
1	0	1	1	$p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2$
1	0	0	1	$p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2$
0	1	1	0	
0	1	0	0	
0	0	1	1	$\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2$
0	0	0	1	$\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2$

x	y	z	$f(x,y,z)$	
1	1	1	1	$p_0 \wedge p_1 \wedge p_2$
1	1	0	0	
1	0	1	1	$p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2$
1	0	0	1	$p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2$
0	1	1	0	
0	1	0	0	
0	0	1	1	$\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2$
0	0	0	1	$\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2$

Disjunktio

$$(p_0 \wedge p_1 \wedge p_2) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee \\ (\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2)$$

on tosi tasan silloin kun $f(v(p_0), v(p_1), v(p_2)) = 1$.

CNF-menetelmä

Jokaista riviä kohden, jossa f saa arvon 0, laaditaan propositiolause, joka on tosi tasan silloin, kun $v(p_0) = x$, $v(p_1) = y$ ja $v(p_2) = z$.

x	y	z	$f(x,y,z)$	
1	1	1	1	
1	1	0	0	$p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2$
1	0	1	1	
1	0	0	1	
0	1	1	0	$\neg p_0 \wedge p_1 \wedge p_2$
0	1	0	0	$\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2$
0	0	1	1	
0	0	0	1	

CNF-menetelmä, jatkoa

x	y	z	$f(x,y,z)$	
1	1	1	1	
1	1	0	0	$p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2$
1	0	1	1	
1	0	0	1	
0	1	1	0	$\neg p_0 \wedge p_1 \wedge p_2$
0	1	0	0	$\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2$
0	0	1	1	
0	0	0	1	

Propositiolauseesta

$$\neg(p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2) \wedge \neg(\neg p_0 \wedge p_1 \wedge p_2) \wedge \neg(\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2)$$

. . .

CNF-menetelmä, jatkoa 2

Propositiolauseesta

$$\neg(p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2) \wedge \neg(\neg p_0 \wedge p_1 \wedge p_2) \wedge \neg(\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2)$$

saadaan de Morganin säännöillä konjunktiivisessa normaalimuodossa oleva propositiolause

$$(\neg p_0 \vee \neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_1 \vee p_2)$$

Universaalisete konnektiivijoukot

Määritelmä

Joukko totuusfunktioita T on *universaalinen* tai *täydellinen*, jos kaikki totuusfunktiot voidaan määritellä T:n funktioiden avulla.

Universaalinen konnektiivijoukko

Lause

Joukko $\{\wedge, \vee, \neg\}$ *on universaalinen konnektiivijoukko.*

Todistus perustuu DNF-menetelmään (tai CNF-menetelmään).

Miten osoitetaan, että konnektiivijoukko *ei ole* universaalinen?