Differentialekvationer I
Räkneövning 4, modellsvar
13.2. 2014 (kl 16–18 CK111)

1. Lös den homogena differentialekvationen

$$xyy' = x^2 + y^2$$

med hjälp av substitutionen $v(x) = \frac{y(x)}{x}$.

Lösning: Vi märker först att

$$xyy' = x^2 + y^2 \iff y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

Nu utnyttjar vi uppgiftens tips och substituerar med

$$\begin{cases} v(x) = \frac{y(x)}{x} \implies y(x) = xv(x) \\ y'(x) = v(x) + xv'(x) \end{cases}$$

Vi får då

$$v(x) + xv'(x) = \frac{1}{v(x)} + v(x) \iff v'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{v(x)}$$

Vi märker att detta är en separerbar ekvation, och eftersom $\frac{1}{v(x)} \neq 0$ så har den inga triviallösningar. Vi separerar variablerna för att lösa ekvationen.

$$\begin{aligned} &\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{v} \iff \int v\,dv = \int \frac{dx}{x} \iff \frac{1}{2}v^2 = \ln|x| + C \\ &\iff v = \pm\sqrt{2\ln|x| + 2C} \quad (C > -\ln|x|) \end{aligned}$$

Nu kan vi substituera tillbaka för att få de sökta lösningarna på $y(x)$.

$$\begin{aligned} &v(x) = \pm\sqrt{2\ln|x| + 2C} \\ &y(x) = xv(x) \\ &\implies y(x) = \pm x\sqrt{2\ln|x| + 2C} \quad (y(x) \neq 0) \end{aligned}$$

2. Tillväxten av en bakteriepopulation beskrivs av den exponentiella tillväxtmodellen. Vid tidpunkten $t_0 = 0$ är massan av populationen 1 mg och efter en vecka 20 g.
(i) Bestäm Malthus' parameter $r > 0$ (i lämplig tidsenhet).
(ii) Vid vilken tidpunkt är storleken av populationen 1000 gånger den ursprungliga?

Lösning: Den exponentiella tillväxtmodellen beskrivs i kapitel 2.2.1 i kompendiet.

Låt $N(t)$ vara populationens storlek i tidpunkten t. Nu vet vi att $N(0) = 1\,(\text{mg})$ och $N(7) = 20000\,(\text{mg})$ då tiden räknas i dagar. Bakteriepopulationens tillväxthastighet fås från följande differentialekvation av första ordningen

$$\frac{d}{dt}N(t) = rN(t),$$

där koefficienten r kallas för Malthus parameter. Lösningen för (den separerbara) ekvationen ovan med initialvärdet $N(0) = N_0$ är

$$N(t) = N_0 e^{rt}, \quad t \geq 0$$

(i) Vi vet att $N(7) = 20000$ och $N(0) = N_0 = 1$, så vi får

$$N(7) = N_0 e^{7r} \iff 20000 = 1 \cdot e^{7r} \iff \ln(20000) = 7r \iff r = \frac{\ln(20000)}{7} \approx 1,415$$

Ta i beaktan att värdet på r kan variera beroende på vald tidsenhet.

(ii) Nu vill vi veta i vilken tidpunkt $N(t) = 1000 \cdot N_0 = 1000$. Vi vill alltså lösa ut t.

$$1000 = N(t) = N_0 e^{tr} = e^{\frac{t\ln(20000)}{7}} \iff \ln(1000) = \frac{t\ln(20000)}{7} \iff t = \frac{7\ln(1000)}{\ln(20000)} \approx 4,883 \text{ d.}$$

Eller för att vara mera exakt, ca. 4 d 21 h 10 min 52 s.

3. Sök ekvationen för den kurva $y = y(x)$ som har följande egenskap: tangenten till kurvan i punkten (x_0, y_0) skär x-axeln i punkten $(x_0 + kx_0^2, 0)$, där $k > 0$ är en konstant, och kurvan löper genom punkten $(1, e)$.

Lösning: Vi söker alltså ekvationen av någon kurva $y(x)$. Från uppgiften fick vi veta en hel del om tangenten, vilket kommer att vara till stor hjälp när vi löser uppgiften. För det första, vet vi att tangenten är en rät linje som går genom punkterna (x_0, y_0) och $(x_0+kx_0^2, 0)$. Då tar vi lite gymnasiematematik (eller MAOL:s tabeller) till hjälp och kommer fram till att linjens riktningskoefficient, som vi betecknar med m, är

$$m = \frac{y_0 - 0}{x_0 - (x_0 + kx_0^2)} = -\frac{y_0}{kx_0^2}$$

Vi vet att riktningskoefficienten för en viss punkt i en kurva bestäms av dess derivata, och att i själva verket är den samma som riktningskoefficienten för tangenten i denna punkten. Alltså kar kurvan samma riktningskoefficient som tangenten i (x_0, y_0), dvs.

$$y'(x_0) = m = -\frac{y_0}{kx_0^2}$$

Eftersom de givna sambanden skulle gälla för alla punkter på kurvan så kan vi ”glömma bort” indexena. Härmed har vi reducerat sökandet av $y(x)$ till att lösa följande differentialekvation:

$$y'(x) = -\frac{y}{kx^2}$$

Vi märker att detta är en separerbar ekvation med triviallösningen $y(x) = 0$. Resten av lösningarna hittar vi med separering av variabler:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{kx^2} \iff \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{kx^2} \iff \ln|y| = \frac{1}{kx} + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R})$$
$$\iff y = C_2 e^{\frac{1}{kx}} \quad (C_2 = \pm e^{C_1} \neq 0)$$

Nu vet vi även från uppgiften att den sökta ekvationen passerar punkten $(1, e)$. Alltså får vi kravet $y(1) = e$, med hjälp av vilket vi kan lösa C_2:

$$y(1) = e \implies e = C_2 e^{\frac{1}{k}} \iff C_2 = e^{\left(1-\frac{1}{k}\right)}$$

Så den sökta lösningen för $y(x)$ blir:

$$y(x) = e^{\left(1-\frac{1}{k}\right)} e^{\frac{1}{kx}} = e^{\left(1-\frac{1}{k}+\frac{1}{kx}\right)}$$

4. Lös differentialekvationen

$$(y')^2 + 2y'y'' = 0$$

genom att substituera $w(x) = y'(x)$.

Lösning: Vi börjar med att substituera enligt tipset, dvs. med

$$y'(x) = w(x) \implies y''(x) = w'(x).$$

Vi får

$$w(x)^2 + 2w(x)w'(x) = 0 \iff w'(x) = -\frac{w(x)}{2} \quad \text{för } w(x) = y'(x) \neq 0 \implies y(x) \neq C \quad (C \in \mathbb{R})$$

När vi dividerar med $w(x)$ bortfaller alltså lösningarna där $w(x) = 0$, vilka trivialt löser ekvationen. Vi märker att den nya ekvationen är en första gradens separerbar ekvation med triviallösningarna $w(x) = 0$, vilka vi konstaterade att var triviala lösningar. Resten av lösningarna får vi genom separering av variabler:

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{w}{2} \iff \int \frac{dw}{w} = -\frac{1}{2}\int 1\,dx \iff \ln|w| = -\frac{1}{2}x + C_1$$
$$\iff w = C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \quad (\text{där } C_2 = \pm e^{C_1} \neq 0)$$

För att hitta lösningarna för $y(x)$ substituerar vi tillbaka med $w(x) = y'(x)$ Vi får nu

$$y'(x) = C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \implies y(x) = \int C_2 e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = -2C_2 e^{-\frac{1}{2}x} + C_3 \quad (C_3 \in \mathbb{R})$$

Vilka alltså är lösningarna för den givna ekvationen. Mär även att eftersom $y(x) = C$ är triviallösningen för ekvationen, så behövs inte $C_2 = 0$ förbjudas.

5. Beräkna Wronskis determinant $W(y_1, y_2)$ för följande par $\{y_1, y_2\}$ av funktioner:

$$(i)\ \{x, x^2\}, \qquad (ii)\ \{x, x\ln(x)\}.$$

Kan paret $\{x, x^2\}$ bilda ett fundamentalsystem av lösningar till någon linjär differentialekvation av 2. ordningen på hela $\mathbf{R}$?

Lösning: Formeln för Wronskis determinant ges på sidan 36 i kompendiet:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

Vi använder denna på de givna ekvationsparen
(i)

$$W(x, x^2) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2$$

(ii)

$$W(x, x\ln(x)) = \begin{vmatrix} x & x\ln(x) \\ 1 & \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \end{vmatrix} = x(\ln(x) + 1) - x\ln(x) = x\ln(x) + x - x\ln(x) = x$$

Nu för att ett par funktioner $\{y_1, y_2\}$ skall bilda ett fundamentalsystem av lösningar till en linjär homogen differentialekvation av 2:a ordningen på hela $\mathbb{R}$ så måste $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Eftersom $W(x, x^2) = 0$ när $x = 0$ så är svaret på följdfrågan nej!

6. Verifiera att $\{e^x, e^{3x}\}$ bildar ett fundamentalsystem av lösningar till differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

på $\mathbb{R}$.

Lösning: Vi börjar med att beteckna $y_1(x) = e^x$ och $y_2(x) = e^{3x}$. Först verifierar vi att y_1 och y_2 faktiskt är lösningar till uppgiftens homogena ekvation av andra ordningen. Eftersom $y_1'(x) = e^x$ och $y_1''(x) = e^x$ får vi

$$y_1''(x) - 4y_1'(x) + 3y_1(x) = e^x - 4e^x + 3e^x = 0$$

Alltså är y_1 en lösning för uppgiftens ekvation. Nu, eftersom $y_2'(x) = 3e^{3x}$ och $y_2''(x) = 9e^{3x}$ får vi

$$y_2''(x) - 4y_2'(x) + 3y_2(x) = 9e^{3x} - 12e^{3x} + 3e^{3x} = 0$$

Alltså är även y_2 en lösning för uppgiftens ekvation. Vi beräknar nu Wronskis determinant:

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{vmatrix} = e^x \cdot 3e^{3x} - e^{3x} \cdot e^x = 3e^{3x+x} - e^{3x+x} = 2e^{4x} > 0$$

Eftersom $W(e^x, e^{3x}) \neq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ så bildar $\{e^x, e^{3x}\}$ ett fundamentalsystem av lösningar till uppgiftens ekvation.