Differentialekvationer I
Räkneövning 3, modellsvar
6.2. 2014 (kl 16–18 CK111)

1. Lös den linjära differentialekvationen

$$y' + xy = xe^{x^2}$$

med hjälp av en lämplig integrerande faktor.

Lösning: Vi märker att ekvationen har formen $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$, där $p(x) = x$ och $q(x) = xe^{x^2}$. Ekvationen är alltså i standardform. Vi beräknar den integrerande faktorn:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int x\,dx} = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

Vi multiplicerar uppgiftens ekvation med den integrerande faktorn och får således:

$$\begin{aligned} & y'e^{\frac{1}{2}x^2} + xye^{\frac{1}{2}x^2} = xe^{x^2} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} = xe^{\frac{3}{2}x^2} \iff \frac{d}{dx}\left(ye^{\frac{1}{2}x^2}\right) = xe^{\frac{3}{2}x^2} \\ \iff & ye^{\frac{1}{2}x^2} = \int xe^{\frac{3}{2}x^2}\,dx = \frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x^2} + C \quad (C \in \mathbb{R}) \\ \iff & y(x) = \frac{1}{3}e^{x^2} + Ce^{-\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

2. Sök en integrerande faktor till differentialekvationen

$$3xy + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0,$$

samt lös den motsvarande exakta ekvationen.

Lösning: Låt $M(x, y) = 3xy + y^2$ och $N(x, y) = x^2 + xy$. Vi märker först att

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x, y) = 3x + 2y \neq 2x + y = \frac{\partial}{\partial x}N(x, y)$$

Den givna ekvationen är alltså inte exakt. Vi kan använda sats 1.11 för att hitta den integrerande faktorn, men i detta relativt enkla fall är det lättare att pröva sig fram. Vi provar alltså med att multiplicera ekvationen med x.

$$\begin{aligned} & x(3xy + y^2 + (x^2 + xy)y') = x \cdot 0 \implies 3x^2y + xy^2 + (x^3 + x^2y)y' = 0 \\ & M(x, y) = 3x^2y + xy^2 \implies \frac{\partial}{\partial y}M(x, y) = 3x^2 + 2xy \\ & N(x, y) = x^3 + x^2y \implies \frac{\partial}{\partial x}N(x, y) = 3x^2 + 2xy \end{aligned}$$

Alltså fungerar $\mu(x) = x$ som en integrerande faktor. Ifall vi hade använt sats 1.11 skulle vi ha fått:

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{1}{x^2+xy}(3x+2y-2x-y) \\
&= \frac{x+y}{x(x+y)} = \frac{1}{x} \quad \text{(Obs! Endast en funktion av } x\text{)} \\
\mu(x) &= e^{\int h(x)\,dx} = e^{\ln|x|} = |x|
\end{aligned}$$

Vilket också skulle ha fungerat. Vi använder nu de nya värden för $M(x,y)$ och $N(x,y)$, och löser den exakta funktionen. Vi försöker alltså hitta $F(x)$ så att $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ och $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$. Vi får

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y) = \int (3x^2y + xy^2)\,dx + g(y) = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + g(y)$$

Vi vill att $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$ ska gälla, så vi får

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + g(y)) = x^3 + x^2y + g'(y) = x^3 + x^2y \iff g'(y) = 0$$

Vi får alltså $g(y) = C$, där $C \in \mathbb{R}$. Den implicita lösningen är nu

$$F(x,y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3. Lös differentialekvationen

$$y' = (x-y+1)^2$$

med hjälp av substitutionen $w(x) = x - y(x) + 1$.

Lösning: Vi använder oss av det givna tipset och substituerar med

$$\begin{aligned}
&w(x) = x - y(x) + 1 \\
&w'(x) = 1 - y'(x) \implies y'(x) = 1 - w'(x)
\end{aligned}$$

Insättning i den givna ekvationen ger nu

$$1 - w'(x) = w(x)^2 \iff w' = 1 - w^2$$

Vi har nu omvandlat den givna ekvationen till en separerbar. Denna har triviallösningarna $w(x) = 1 \implies x - y(x) + 1 = 1 \implies y(x) = x$ och $w(x) = -1 \implies x - y(x) + 1 = -1 \implies y(x) = x + 2$. De övriga lösningarna hittas med separering av variablerna:

$$\begin{aligned}
&\frac{dw}{dx} = 1 - w^2 \iff \int \frac{dw}{1-w^2} = \int 1\,dt \overset{(*)}{\iff} \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-w} + \frac{1}{1+w}\right)dw = \int 1\,dt \\
&\iff \frac{1}{2}\left(-\ln|1-w| + \ln|1+w|\right) = x + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \iff \ln\left|\frac{1+w}{1-w}\right| = 2x + 2C_1 \\
&\iff \frac{1+w}{1-w} = C_2e^{2x} \quad (C_2 = \pm e^{2C_1} \neq 0) \iff 1 + w = C_2e^{2x}(1-w) \iff w = \frac{C_2e^{2x}-1}{C_2e^{2x}+1}
\end{aligned}$$

Eftersom triviallösningarna var $w(x) = \pm 1$ så behöver inte dessa förbjudas och vi kan tillåta $C_2 \in \mathbb{R}$.

För att hitta lösningarna till den originala ekvationen substituerar vi tillbaka $w(x) = x - y(x) + 1$. Vi får nu:

$$x - y(x) + 1 = \frac{C_2 e^{2x} - 1}{C_2 e^{2x} + 1} \iff$$
$$y(x) = x + 1 - \frac{C_2 e^{2x} - 1}{C_2 e^{2x} + 1} = x + 1 - \frac{C_2 e^{2x} + 1 - 2}{C_2 e^{2x} + 1} = x + 1 - 1 + \frac{2}{C_2 e^{2x} + 1} = x + \frac{2}{C_2 e^{2x} + 1}$$

$(*)$ Partialbråksuppdelning:

$$\frac{1}{1 - w^2} = \frac{1}{(1 - w)(1 + w)} = \frac{A}{1 - w} + \frac{B}{1 + w} = \frac{A(1 + w) + B(1 - w)}{(1 - w)(1 + w)}$$
$$\implies 1 = A(1 + w) + B(1 - w) = w(A - B) + A + B$$
$$\implies A - B = 0 \text{ och } A + B = 1 \implies A = B = \frac{1}{2}$$

4. Lös differentialekvationen
$$y' = \frac{x + y - 1}{x - y + 3}$$
med hjälp av den metod som beskrivs i kapitel 1.5.4 i kompendiet. En implicit lösning $y = y(x)$ räcker.

Lösning: Låt $f(x) = x$. Då är den givna ekvationen av formen

$$y'(x) = f\left(\frac{1 \cdot x + 1 \cdot y(x) + (-1)}{1 \cdot x + (-1) \cdot y + 3}\right).$$

Dvs. av formen som beskrevs i kap. 1.5.4 i kompendiet. Lösningen av dessa går ut på att vi vill ändra om ekvationen till en likgradig ekvation genom passliga substitutioner för x och y. Låt alltså
$$\begin{cases} x = t + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ y(x) = z(x - \alpha) + \beta = z(t) + \beta, \quad \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$
där α och β väljs så, att

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 1 = 0 \implies \beta = 1 - \alpha \\ \alpha - \beta + 3 = 0 \implies \alpha - 1 + \alpha + 3 = 0 \implies \alpha = -1 \implies \beta = 2 \end{cases}$$

Vi substituerar alltså med $x = t - 1$ och $y = z(t) + 2$. Vi får nu

$$y'(x) = z'(t) = \frac{t + z(t)}{t - z(t)} = \frac{1 + z(t)/t}{1 - z(t)/t}, \quad t \neq 0$$

Vi substituerar nu än en gång med

$$u(t) = \frac{z(t)}{t} \iff z = tu \implies z' = u + tu'$$

och får

$$u + tu' = \frac{1+u}{1-u} \iff tu' = \frac{1+u}{1-u} - u = \frac{1+u-u+u^2}{1-u} = \frac{u^2+1}{1-u} \quad (t \neq 0, u \neq 1)$$

Denna ekvation är separerbar och eftersom $\frac{u^2+1}{1-u} \neq 0$ så har den inga triviala lösningar. Vi löser nu ekvationen genom separering av variabler:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{t} \cdot \frac{u^2+1}{1-u} \iff \int \frac{1-u}{u^2+1}\,du = \int \frac{dt}{t} \iff \int \frac{du}{u^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}\,du = \int \frac{dt}{t}$$

$$\iff \arctan u - \frac{1}{2}\ln(u^2+1) = \ln|t| + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R})$$

$$\iff 2\arctan u - \ln(u^2+1) = 2\ln|t| + 2C_1 = \ln|t|^2 + 2C_1 = \ln(C_2 t^2) \quad (C_2 = e^{2C_1} > 0)$$

Som märks är ekvationen inte direkt trivial att lösa explicit. Därför nöjer vi oss med att substituera tillbaka båda våra substitueringar för att forma uttrycken för x och y. Vi substituerar alltså med

$$u = \frac{z}{t} = \frac{y-2}{x+1} \quad \text{och} \quad t = x+1$$

Vi får nu den implicita lösningen

$$2\arctan\left(\frac{y-2}{x+1}\right) - \ln\left(\left(\frac{y-2}{x+1}\right)^2 + 1\right) = \ln\left(C_2(x+1)^2\right)$$

där $u \neq 1 \implies z \neq t \implies y \neq x+3$.

5. Lös initialvärdesproblemet

$$y' + y = xy^3, \quad y(0) = 2.$$

Tips: differentialekvationen är av Bernoulli typ, se kapitel 1.5.1.

Lösning: Vi följer tekniken som beskrivs i kapitel 1.5.1 i kompendiet. Låt $p(x) = 1$, $q(x) = x$ och $\lambda = 3$. Då är

$$y' + y = xy^3 \iff y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y(x)^\lambda$$

Idén med metoden som används för att lösa ekvationer av Bernoullli typ är att vi försöker omvandla ekvationen till linjär genom att först dividera bort y^λ termen. Då vi gör detta mister vi också svaren för vilka $y = 0$ någonstans. Vi måste dessutom konstatera att $y \equiv 0$ är en trivial lösning för alla ekvationer av denna typ.

Vi omvandlar nu ekvationen till linjär genom att:

$$y' + y = xy^3 \iff y^{-3}y' + y^{-2} = x \quad (\text{för } y \neq 0)$$

Vi substituerar nu med

$$\begin{cases} z(x) = y(x)^{-2} \text{ och} \\ z'(x) = -2y(x)^{-3}y'(x) \implies y'(x) = -\frac{1}{2}z'(x)y(x)^3 \end{cases}$$

Vi får

$$-\frac{z'y^3}{2}y^{-3} + z = x \iff -\frac{z'}{2} + z = x \iff z' - 2z = -2x$$

Vi löser nu denna linjära ekvation genom att beräkna den integrerande faktorn:

$$\mu(x) = e^{\int -2\,dx} = e^{-2x}$$

Vi får:

$$\begin{aligned}
&e^{-2x}z' - 2e^{-2x}z = -2xe^{-2x} \iff \frac{d}{dx}(ze^{-2x}) = -2xe^{-2x} \\
&ze^{-2x} = \int -2xe^{-2x}\,dx \overset{(*)}{=} xe^{-2x} - \int e^{-2x}\,dx = xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + C \quad (C \in \mathbb{R}) \\
&z = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}
\end{aligned}$$

$(*)$ Partiell integrering

Vi substituerar nu tillbaka med $z(x) = y(x)^{-2}$ och får

$$y^{-2} = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x} \iff y = \pm\frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}}}$$

Från initialvärdet $y(0) = 2$ får vi

$$2 = y(0) = \frac{1}{\sqrt{0 + \frac{1}{2} + Ce^{2\cdot 0}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + C}} \iff C = -\frac{1}{4}$$

Märk att $y(0) = 2 \implies y^2 = 4$ så vi kan glömma den negativa roten. Den sökta lösningen blir alltså

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{2x}}}$$

6. Sök en approximation $u(1)$ med hjälp av Eulers metod med steglängden $h = \frac{1}{4}$ till $y(1)$ för lösningen $y = y(x)$ av initialvärdesproblemet

$$y' = y - x, \quad y(0) = 2.$$

Hur stort är felet $|y(1) - u(1)|$? (Det är inte svårt att finna den exakta lösningen.)

Lösning: Vi använder oss av metoden som beskrivs i kapitel 1.6 i kompendiet. Låt $f(x, y) = y' = y - x$ och $u(x_k) = y_k$. Nu har vi alltså $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ och $h = 1/4$. Från kompendiet får vi algoritmen:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_0 + (k+1)h = (k+1)/4, \\ u(x_{k+1}) = y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) = y_k + (y_k - x_k)/4 \end{cases}$$

Nu får vi t.ex. att $x_1 = (0+1)/4 = 1/4$ och $y_1 = 2 + (2-0)/4 = 2.5$. När vi applicerar algoritmen på våra initialvärden ända fram till $x_k = 1$, får vi:

k	x_k	y_k
0	0	2
1	1/4	2.5
2	1/2	3.0625
3	3/4	≈ 3.7031
4	1	≈ 4.4414

Alltså är $u(1) \approx 4.4414$.

Uppgiftens ekvation är inte heller svår att lösa exakt. Vi märker att

$$y' = y - x \iff y' - y = -x$$

Vi löser denna linjära ekvation genom att beräkna den integrerande faktorn:

$$\mu(x) = e^{\int -1\, dx} = e^{-x}$$

När vi multiplicerar ekvationen med den integrerande faktorn får vi:

$$\begin{aligned} &y'e^{-x} - ye^{-x} = -xe^{-x} \iff \frac{d}{dx}(ye^{-x}) = -xe^{-x} \\ &\iff ye^{-x} = \int -xe^{-x}\, dx \overset{(*)}{=} xe^{-x} - \int e^{-x}\, dx = xe^{-x} + e^{-x} + C \\ &\iff y = x + 1 + Ce^{x} \end{aligned}$$

$(*)$ Partiell integrering

Med våra initialvärden bestämmer vi C:

$$y(0) = 2 \implies 2 = 0 + 1 + Ce^0 \implies C = 1$$

Alltså är den exakta lösningen för ekvationen $y(x) = x + 1 + e^x$. Felmarginalen i denna uppgift blir alltså

$$|y(1) - u(1)| \approx 0.2769$$