Differentialekvationer I
Räkneövning 1, modellsvar
23.1. 2014 (kl 16-18 CK111)

1. Bestäm ordningen och typen (dvs. är DEn i allmän form eller i normalform) av följande differentialekvationer:

$$(i)\ xy'' + 2y\sin(x) = e^x, \quad (ii)\ y' + \sin(x+y) = \sin(x), \quad (iii)\ y^{(4)} + y'' = 0.$$

*Lösning:* Alla funktioner i uppgiften är ordinära differentialekvationer som kan skrivas i formen

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

där $F\colon D \to \mathbb{R}$ är en funktion. Talet $n$ ger ekvationens ordning.

En differentialekvation sägs vara i normalform, om den kan skrivas som

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

där $G\colon D' \to \mathbb{R}$ är en funktion. Nedan ser vi varför alla ekvationer i uppgiften är i normalform.

(i) Ekvationen är av 2:a ordningen och i normalform, eftersom den kan skrivas som

$$y'' = \frac{e^x}{x} - \frac{2y\sin(x)}{x}, \text{ där } x \neq 0.$$

(ii) Ekvationen är av 1:a ordningen och i normalform, eftersom den kan skrivas som

$$y' = \sin(x) - \sin(x+y).$$

(iii) Ekvationen är av 4:e ordningen och i normalform, eftersom den kan skrivas som

$$y^{(4)} = -y''.$$

2. Sök den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y''(x) - \sin(2x) - 2 = 0.$$

Vilken lösning satisfierar initialvärdesproblemet $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$?

*Lösning:* Vi skriver om den givna ekvationen som $y''(x) = \sin(2x) + 2$ och märker att ekvationen är lösbar genom integrering två gånger:

$$y''(x) = \sin(2x) + 2 \iff y'(x) = \int (\sin(2x) + 2)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + 2x + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R})$$

$$\iff y(x) = \int (-\frac{1}{2}\cos(2x) + 2x + C_1)\,dx = -\frac{1}{4}\sin(2x) + x^2 + C_1 x + C_2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Detta är alltså den allmänna lösningen för ekvationen. För att hitta lösningen som satisfierar initialvärdesproblemet $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ substituerar vi de givna värden i respektiva uttrycken:

$$\begin{aligned} y'(0) = 1 &\implies 1 = -\frac{1}{2}\cos(0) + 2 \cdot 0 + C_1 = -\frac{1}{2} + C_1 \implies C_1 = \frac{3}{2} \\ y(0) = 0 &\implies 1 = \frac{1}{4}\sin(0) + 0^2 + \frac{3}{2} \cdot 0 + C_2 = C_2 \implies C_2 = 1 \end{aligned}$$

Funktionen som satisfierar initialvärdesproblemet är alltså

$$y(x) = -\frac{1}{4}\sin(2x) + x^2 + \frac{3}{2}x + 1$$

3. Lös differentialekvationen

$$y' = e^{x+y},$$

samt sök den lösning $y = y(x)$ som satisfierar $y(1) = 0$.

*Lösning:* Låt:

$$p(x) = e^x, \quad q(y) = e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Nu kan vi skriva den givna ekvationen som $y' = e^x e^y = p(x)q(y)$ och därifrån märka att ekvationen är separerbar. Eftersom $q(y) = e^y > 0$ för alla $y \in \mathbb{R}$ så har ekvationen inte heller några triviala lösningar. Vi söker lösningarna genom separering av variablerna.

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = e^x e^y \iff \int \frac{1}{e^y}\,dy = \int e^x\,dx \iff -e^{-y} = e^x + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \\ &\iff e^{-y} = C_2 - e^x \quad (\text{där } C_2 = -C_1) \iff -y = \ln(C_2 - e^x) \\ &\iff y = \ln\frac{1}{C_2 - e^x} \quad (\text{där } C_2 - e^x > 0 \implies C_2 > e^x) \end{aligned}$$

Detta ger allmänna lösningen. För att lösa initialvärdesproblemet substituerar vi:

$$y(1) = 0 \implies \ln\frac{1}{C_2 - e^1} = 0 \implies C_2 - e = 1 \implies C_2 = 1 + e$$

Funktionen som satisfierar initialvärdesproblemet är alltså

$$y(x) = \ln\frac{1}{1 + e - e^x}, \text{ för } 1 + e > e^x \implies x < \ln(1 + e)$$

4. Lös differentialekvationen

$$y' = y(y + 1)$$

samt skissera en bild av lösningarna. *Tips:* partialbråk $\frac{1}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1}$.

*Lösning:* Låt

$$p(x) = 1, \quad q(y) = y(y+1) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Nu kan vi skriva den givna ekvationen som $y' = 1 \cdot y(y+1) = p(x)q(y)$ och därifrån märka att ekvationen är separerbar. Ekvationen har två triviala lösningar, detta ser vi från att

$$q(y) = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ y = -1. \end{cases}$$

De triviala lösningarna är alltså $y(x) = 0$ och $y(x) = -1$. Resten av lösningarna hittas med separering av variablerna.

$$\frac{dy}{dx} = y(y+1) \iff \int \frac{dy}{y(y+1)} = \int 1\,dx \overset{(*)}{\iff} \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy = \int 1\,dx$$
$$\iff \ln|y| - \ln|y+1| = x + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \iff \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = x + C_1 \iff$$
$$\left|\frac{y}{y+1}\right| = e^{(x+C_1)} = C_2 e^x \quad (\text{där } C_2 = e^{C_1} > 0) \implies \frac{y}{y+1} = Ce^x \quad (\text{där } C = \pm C_2 \neq 0)$$
$$\iff y = Ce^x(y+1) \iff y - Ce^x y = Ce^x \iff y = \frac{Ce^x}{1 - Ce^x}$$

Detta ger den allmänna lösningen för ekvationen. Märk att vanligen skulle $y \neq -1$ och $y \neq 0$ i allmänna lösningarna. Eftersom dessa var ekvationens triviala lösningar behöver detta inte förbjudas och vi kan tillåta $C = 0$.

$(*)$ Partialbråksuppdelning:

$$\frac{1}{y(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{A(y+1) + By}{y(y+1)} \quad (A, B \in \mathbb{R})$$
$$\implies 1 = A(y+1) + By = (A+B)y + A \quad \forall y \in \mathbb{R}$$
$$\implies A + B = 0 \text{ och } A = 1 \implies B = -1$$

För bilder, se sista sidan.

5. Lös initialvärdesproblemet

$$y' = y^2 + 1, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

*Tips:* funktionen $\arctan(t)$ hjälper.

*Lösning:* Låt

$$p(x) = 1, \quad q(y) = y^2 + 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Nu kan vi skriva den givna ekvationen som $y' = 1 \cdot (y^2+1) = p(x)q(y)$ och därifrån märka att ekvationen är separerbar. Eftersom $q(y) = y^2 + 1 > 0$ för alla $y \in \mathbb{R}$ så har ekvationen inte några triviala lösningar. Separering av variablerna ger

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 1 \iff \int \frac{dy}{y^2+1} = \int 1\,dx \iff \arctan y = x + C \quad (C \in \mathbb{R})$$
$$\iff y = \tan(x + C) \quad (\text{där } x + C \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z})$$

Detta ger allmänna lösningen. För att lösa initialvärdesproblemet substituerar vi:

$$y(\frac{\pi}{2}) = 1 \implies \tan(\frac{\pi}{2} + C) = 1 \iff \frac{\pi}{2} + C = \frac{\pi}{4} \iff C = -\frac{\pi}{4}$$

Funktionen som satisfierar initialvärdesproblemet är alltså

$$y(x) = \tan(x - \frac{\pi}{4}), \text{ för } x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \implies x \neq \frac{3\pi}{4} + n\pi$$

6. Sök alla lösningar till differentialekvationen

$$y' + 2xy = x.$$

*Lösning:* Vi märker att

$$y' + 2xy = x \iff y' = x - 2xy = x(1-2y) = p(x)q(y)$$

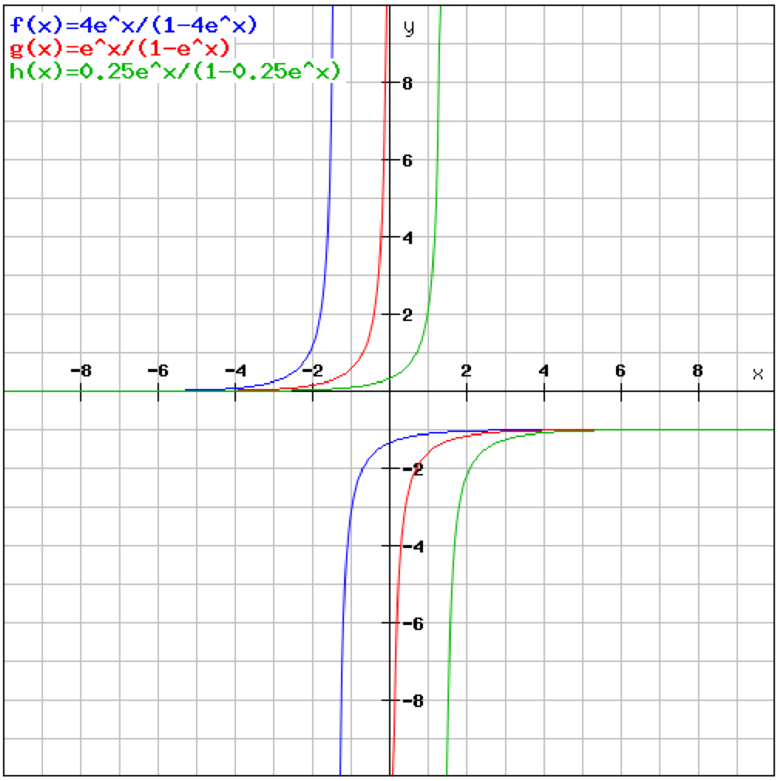
om $p(x) = x$ och $q(y) = 1 - 2y$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$. Alltså är ekvationen separerbar. Ekvationen har en trivial lösning, detta ser vi från att

$$q(y) = 0 \iff 1 - 2y = 0 \iff y = \frac{1}{2}.$$

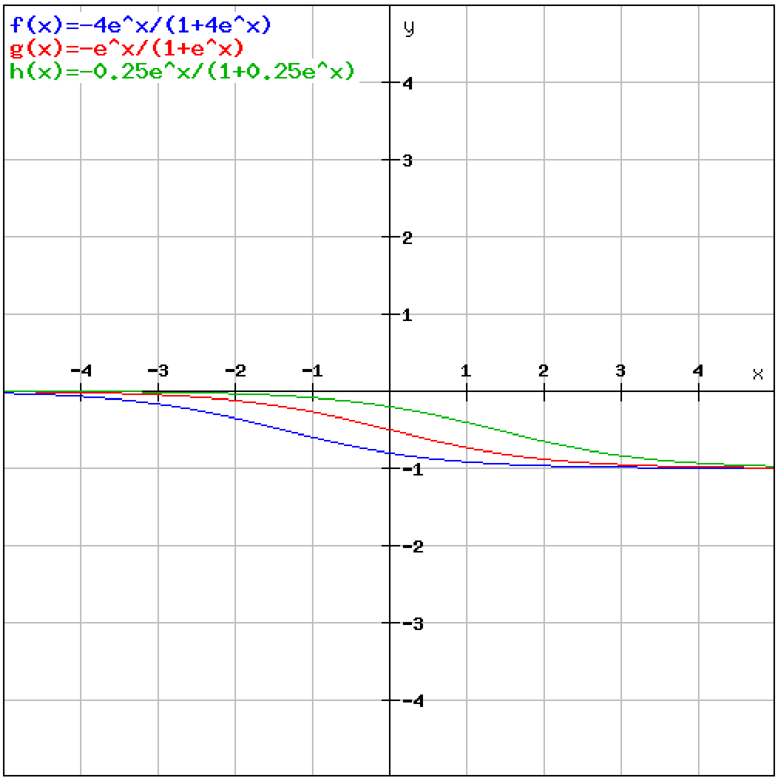
Alltså är den triviala lösningen $y(x) = \frac{1}{2}$. Resten av lösningarna hittas med separering av variablerna.

$$\frac{dy}{dx} = x(1-2y) \iff \int \frac{dy}{1-2y} = \int x\,dx \iff -\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y - \frac{1}{2}} = \int x\,dx$$
$$\iff -\frac{1}{2}\ln\left|y - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \iff \ln\left|y - \frac{1}{2}\right| = -x^2 - 2C_1 \iff$$
$$\left|y - \frac{1}{2}\right| = e^{-x^2-2C_1} \iff y - \frac{1}{2} = \pm e^{-x^2-2C_1} = Ce^{-x^2} \quad (\text{där } C = \pm e^{-2C_1} \neq 0)$$
$$\iff y = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$$

Detta ger den allmänna lösningen. Märk även här, att i normala fall skulle $y \neq \frac{1}{2}$ men eftersom detta var ekvationens triviala lösning så behöver det inte förbjudas och vi kan tillåta $C = 0$.




Uppgift 4: $C = 4$, $C = 1$ och $C = \frac{1}{4}$.




Uppgift 4: $C = -4$, $C = -1$ och $C = -\frac{1}{4}$.