Logiikka I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Kevät 2013
Harjoitus 3

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ke 30.1.2013
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ke 13.2.2013

Tehtävä 1 *Sovella totuustaulumenetelmää seuraavaan tehtävään: Ratkaise onko* $p_0 \to \neg p_0$ *tautologia, kontingentti vai ristiriita.*

Tehtävä 2 *Sovella totuustaulumenetelmää seuraavaan tehtävään: Ratkaise onko* $p_0 \vee \neg(p_0 \wedge p_1)$ *tautologia, kontingentti vai ristiriita.*

Tehtävä 3 *Sovella totuustaulumenetelmää seuraavaan tehtävään: Ovatko propositiolauseet* $p_0 \to p_1$ *ja* $\neg(p_1 \to p_0)$ *loogisesti ekvivalentteja vai ei?*

Tehtävä 4 *Sovella totuustaulumenetelmää seuraavaan tehtävään: Ovatko propositiolauseet* $\neg p_0 \vee p_1$ *ja* $\neg(p_0 \wedge p_1)$ *loogisesti ekvivalentteja vai ei?*

Tehtävä 5 *Osoita totuustaulumenetelmällä, että seuraavat propositiolauseet ovat loogisesti ekvivalentteja:* $\neg(A \wedge B)$ *ja* $\neg A \vee \neg B$.

Tehtävä 6 *Osoita totuustaulumenetelmällä, että seuraavat propositiolauseet ovat loogisesti ekvivalentteja:*

1. $\neg\neg A$ *ja* A.
2. $A \wedge A$ *ja* A.
3. $A \vee A$ *ja* A.

Tehtävä 7 * *Osoita totuustaulumenetelmällä, että seuraavat propositiolauseet ovat loogisesti ekvivalentteja:*

1. $A \to B$ *ja* $\neg A \vee B$
2. $A \leftrightarrow B$ *ja* $(A \to B) \wedge (B \to A)$

Tehtävä 8 *Osoita totuustaulumenetelmällä, että seuraavat propositiolauseet ovat loogisesti ekvivalentteja:*

1. $A \wedge (B \vee C)$ *ja* $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
2. $A \vee (B \wedge C)$ *ja* $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Tehtävä 9 *Osoita totuustaulumenetelmällä, että seuraavat propositiolauseet ovat loogisesti ekvivalentteja:*

1. $A \to (B \to C)$ *ja* $B \to (A \to C)$

2. $A \to (B \to C)$ *ja* $(A \wedge B) \to C$

Tehtävä 10 * *Määritellään propositiolauseille, joissa ei esiinny* $\to$*- eikä* $\leftrightarrow$*-symboleja:*

1. $(p_i)^+ = p_i, (p_i)^- = \neg p_i$

2. $(\neg A)^+ = A^-, (\neg A)^- = A^+$

3. $(A \wedge B)^+ = A^+ \wedge B^+, (A \wedge B)^- = A^- \vee B^-$

4. $(A \vee B)^+ = A^+ \vee B^+, (A \vee B)^- = A^- \wedge B^-$

Propositiolausetta A^+ *kutsutaan A:n* **negaatio-normaalimuodoksi**. *Siinä negaatiosymboleita esiintyy vain propositiosymboleiden edessä. Mitä on* $(\neg((p_0 \wedge p_1) \vee p_2))^+$*?*

Tehtävä 11 *Jatkoa edelliseen tehtävään. Edelleen tarkastellaan vain propositiolauseita, joissa ei esiinny* $\to$*- eikä* $\leftrightarrow$*-symboleja. Osoita, että* A^+ *ja* A *ovat loogisesti ekvivalentteja.* [Vihje: Osoita, että $v(A^+) = v(A)$ ja $v(A^-) = 1 - v(A)$ kaikilla propositiolauseilla A. Aloita tapauksesta $A = p_i$. Tee sitten induktio-oletus, että $v(A^+) = v(A)$, $v(B^+) = v(B)$, $v(A^-) = 1 - v(A)$ ja $v(B^-) = 1 - v(B)$. Seuraavaksi tarkastele propositiolauseita $\neg A$, $(A \wedge B)$ ja $(A \vee B)$ ja osoita, että väite pätee niillekin.]

Tehtävä 12 *Jatkoa edelliseen tehtävään. Edelleen tarkastellaan vain propositiolauseita, joissa ei esiinny* $\to$*- eikä* $\leftrightarrow$*-symboleja. Osoita, että* A^- *ja* $\neg A$ *ovat loogisesti ekvivalentteja. Tämä osoittaa, että jos propositiolauseessa* A *ei esiinny* $\to$*- eikä* $\leftrightarrow$*-symboleja, on helppo löytää propositiolause, nimittäin* A^-*, joka on loogisesti ekvivalentti A:n negaation kanssa.* [Vihje: Huomaa, että jos noudatit edellisen kohdan vihjettä, niin tämä tehtävä on erityisen helppo.]

Tehtävä 13 *Olkoon* A *propositiolause ja* $p_0, \ldots, p_{n-1}$ *siinä esiintyvät propositiosymbolit. Olkoon jokaisella* $i = 0, \ldots, n-1$ *annettu jokin propositiolause* A_i*. Olkoon* A' *saatu propositiolauseesta* A *sijoittamalla* A_i *propositiosymbolin* p_i *tilalle kaikkialla propositiolauseessa* A*. Osoita, että jos* A *on tautologia, niin myöskin* A' *on.* [Vihje: Oleta, että A on tautologia ja osoita kaikille v, että $v(A') = 1$. Miten? Oleta, että v on annettu. Siis v antaa jokaiselle p_i totuusarvon. Määrittele propositiolauseiden A_i avulla uusi totuusjakauma v'. Osoita, sitten $v(A') = v'(A)$, mistä $v(A') = 1$ seuraa, koska A on tautologia.]

Tehtävä 14 *Osoita, että* $\{\to\}$ *ei ole universaalinen konnektiivijoukko. Vihje: Osoita ensin, että jokainen konnektiivi* $f(x_1, \ldots, x_n)$*, joka voidaan määritellä konnektiivin* $\to$ *avulla, toteuttaa* $f(1, \ldots, 1) = 1$.

Tehtävä 15 *Anna propositionlause* A *johon liittyvä totuusfunktio* f_A *on:*

x_0	x_1	x_2	$f_A(x_0, x_1, x_2)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1