

Logiikka I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Kevät 2013
Harjoitus 1

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ke 16.1.2013
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ke 30.1.2013

1. Propositiologiikka tutkii väitelauseita, jotka ovat joko tosia tai epätosia. Mitkä seuraavista ovat propositiologiikan lauseita?
 - a) Sataa ja on kylmä.
 - b) Olisipa jo kesä.
 - c) Jos tuuli kääntyy ja sade yltyy, niin parvekekin kastuu.
 - d) Ellen aivan erehdy, juhannus on kesäkuussa.
 - e) Onko pääsiäinen maaliskuussa?
 - f) Tulkaa ajoissa!
2. Mitkä seuraavista ovat propositiologiikan lauseita?
 - a) Jos n on alkuluku, niin n on pariton, paitsi jos $n = 2$.
 - b) Jos n on alkuluku, niin kuu on juustoa.
 - c) Olkoon x reaaliluku.
 - d) Induktioperiaatteen nojalla väite on todistettu.
 - e) Jos x on positiivinen, onko \sqrt{x} reaaliluku?
 - f) Jos x on reaaliluku, niin \sqrt{x} on reaaliluku.
3. Lauseen syntaksi viittaa sen esitykseen merkkijonona. Syntaksi tarkatelee lauseessa esiintyviä merkkejä, niiden lukumäärää ja järjestystä. Semantiikka puolestaan viittaa lauseen merkitykseen. Kumpi seuraavista lauseista on syntaksiltaan ja kumpi semantiikaltaan lähempänä lausetta "Syksyisin metsät täyttyvät tateista."
 - a) Sieniä voi löytää syksyisestä korvesta.
 - b) Syksyisin metsät täyttyvät hirvikärpäsistä.
4. Ovatko seuraavat sanaparit syntaksiltaan vaiko semanttisiltaan ominaisuuksiltaan samankaltaisia?
 - a) "rosoinen" ja "rasvainen"
 - b) "karhea" ja "rosoinen"
 - c) "diktaattori" ja "yksinhallitsija"
 - d) "hiiri" ja "hiili"
 - e) "salaatti" ja "bataatti"
5. Merkitään propositiiosymboleilla seuraavia lauseita:
 p_0 : Sataa.
 p_1 : Tuulee.
 p_2 : Ulkona on kylmä.
Mitä seuraavat propositiolauseet ilmaisevat?
 - a) $p_0 \wedge p_1$
 - b) $p_1 \rightarrow \neg p_0$
 - c) $(p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2$

6. Tarkastellaan lausetta "Joko Hannu ostaa appelsiineja ja banaaneja, tai Terttu ostaa tomaatteja, mutta kumpikaan ei osta kurkkua."
- Mitkä ovat lauseeseen sisältyvät atomilauseet?
 - Formalisoi lause propositiologiikan kaavalla.
7. Mitkä seuraavista merkkijonoista ovat propositiolauseita?
- $((\neg p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_0)$
 - $p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow p_2$
 - $)p_0 \vee \rightarrow p_2$
 - p_{3201}
 - $p_0 \vee p_1 \wedge p_0$
8. Mitkä ovat seuraavien propositiolauseiden pääkonnektiivit?
- $\neg\neg p_0 \rightarrow p_0$
 - $((p_1 \rightarrow p_1) \wedge p_0)$
 - $((p_0 \vee p_1) \vee \neg(p_1 \wedge p_0))$
 - $\neg(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2))$
- 9.* Mitkä ovat lauseen $(\neg(p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow (p_0 \vee (p_1 \wedge p_2)))$ alikaavat.
10. Anna esimerkki merkkijonoista A ja B , jotka eivät ole propositiolauseita, mutta joilla AB (merkkijono, joka saadaan kun laitetaan merkkijonot A ja B peräkkäin) on propositiolause.
11. Anna esimerkki merkkijonoista A ja B , jotka eivät ole propositiolauseita, mutta joilla $(A \rightarrow B)$ on propositiolause.

Palauta mieleen induktiotodistus (luonnollisilla luvuilla). Hyvä esitys löytyy esimerkiksi Heikki Junnilan monisteesta "Johdatus diskreettiin matematiikkaan" s. 35–41 (<http://www.helsinki.fi/~hjkjunni/jdm.pdf>).

- 12.* Tässä (ja seuraavassa) tehtävässä osoitetaan, että mikäli propositiolauseessa on n konnektiivia, siinä esiintyy korkeintaan $n + 1$ propositiosymbolia. Todistus etenee induktiolla $n:n$ suhteen.
- Mikä on alkuaskel? (Minkälaisissa kaavoissa on 0 konnektiivia?) Tarkista, että väite pätee näille kaavoille.
 - Mikä on induktio-oletus? Huomaa, että induktio-oletuksia on olemassa kahdenmuotoisia, joko "väite pätee arvolla $k = n$ " tai "väite pätee kaikilla $k \leq n$ ". Kumpi sopii paremmin tähän tilanteeseen?
 - Mitä induktioaskeleessa tapahtuu? Tarkemmin: jos kaavassa on $n + 1$ konnektiivia, miten "viimeisin" on siihen tullut? Huomaa, että tässä on monta kohtaa. Muotoile induktioväite.
13. (jatkoa edelliselle) Todista induktioväite. Huomaa: todistus sisältää monta kohtaa.
14. Todista induktiolla, että propositiolauseella, jossa on n konnektiivia, on korkeintaan $2n + 1$ alikaavaa.