Logiikka I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Kevät 2013
Tehtäviä 13
Harjoitusten viimeinen palautuspäivä: 24.4.2013 klo 18:00

Tehtävä 1 *Anna lauseelle*
$$\forall x \exists y (R_0(F_0^1(x), x) \vee R_1(y, x))$$
luonnollinen päättely lauseesta
$$\forall x \forall y (R_0(y, x) \vee R_1(y, x)).$$

Tehtävä 2 *Osoita sopivan seanttisen puun avulla, että lause* $\forall x \exists y (R_0(F_0^1(x), x) \rightarrow R_0(y, x))$ *on validi.*

Tehtävä 3 *Osoita sopivan semanttisen puun avulla että, lause*
$$\forall y \forall z (\exists x (R_0(y) \wedge R_1^3(x, y, z)) \rightarrow (R_0(y) \wedge \exists x R_1^3(x, y, z)))$$
on validi.

Tehtävä 4 *Tarkastellaan lausetta:*
$$(R_0^3(c, d, e) \vee \forall x P_0(x)) \rightarrow \forall x (R_0^3(x, d, e) \vee P_0(x)).$$
Onko lause validi, kontingentti vai ristiriitainen? Jos se on validi tai ristiriitainen, osoita tämä sopivalla päättelyllä tai sopivalla semanttisella todistuksella. Jos lause on kontingentti, osoita tämä malleilla, jotka saat semanttisten puiden menetelmällä.

Tehtävä 5 *Osoita semanttisen puun avulla, että lause*
$$\exists x (P_0(c) \vee P_0(F_0^1(x))) \rightarrow (P_0(c) \vee \exists y P_0(y))$$
on valid.

Tehtävä 6 *Tarkastellaan lausetta:*
$$(R_0(c, d) \vee \forall x P_0(x)) \rightarrow \forall x (R_0(c, d) \vee P_0(F_0^1(x))).$$
Onko lause validi, kontingentti vai ristiriitainen? Jos se on validi tai ristiriitainen, osoita tämä sopivalla päättelyllä tai sopivalla semanttisella todistuksella. Jos lause on kontingentti, osoita tämä malleilla, jotka saat semanttisten puiden menetelmällä.

Tehtävä 7 *Tarkastellaan lausetta:*
$$\forall x P_0(F_0^1(x), x) \vee \exists x \neg P_0(x, F_0^1(x)).$$
Onko lause validi, kontingentti vai ristiriitainen? Jos se on validi tai ristiriitainen, osoita tämä sopivalla päättelyllä tai sopivalla semanttisella todistuksella. Jos lause on kontingentti, osoita tämä malleilla, jotka saat semanttisten puiden menetelmällä.

Tehtävä 8 *Seuraavassa "päättelyssä" lauseelle* $\forall y \exists z \forall x R_0^3(z, y, x)$ *lauseesta* $\forall y \forall x R_0^3(F_0^1(x), y, x)$ *on virhe:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y \forall x R_0^3(F_0^1(x), y, x)}{\forall x R_0^3(F_0^1(x), y, x)} \ \forall \ \mathbf{E}}{\exists z \forall x R_0^3(z, y, x)} \ \exists \ \mathbf{T}}{\forall y \exists z \forall x R_0^3(z, y, x)} \ \forall \ \mathbf{T}$$

Mikä virhe?

Tehtävä 9 *Rakenna semanttisen puun avulla malli lauseelle*

$$\exists x \forall y \exists z R_0^3(x, y, z) \wedge \neg \forall x R_0^3(x, x, x).$$

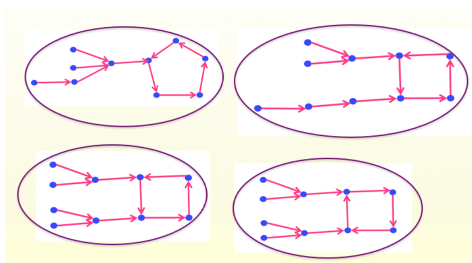
Tehtävä 10 *Olkoon* $L = \{F_0^1\}$. *Osoita aakkoston* L *termeille* t *joissa esiintyy vain muuttuja* x_1:

$$\forall x_1 \forall y_1 (x_1 = y_1 \to t = t'),$$

missä t' *on saatu termistä* t *korvaamalla* x_1 *muuttujalla* y_1. *Käytä identiteettiaksioomeja I1-I7 ja luonnollista päättelyä, tai vaihtoehtoisesti semanttista todistusta.*

Tehtävä 11 *Osoita, että jos verkko* $\mathcal{M}$ *on isomorfinen verkon* $\mathcal{M}'$ *kanssa ja edelleen* $\mathcal{M}'$ *on isomorfinen verkon* $\mathcal{M}''$ *kanssa, niin* $\mathcal{M}$ *ja* $\mathcal{M}''$ *ovat isomorfiset.*

Tehtävä 12 *Mitkä seuraavista malleista, miss kussakin on yksi unaarinen (1-paikkainen) funktio, ovat isomorfiset keskenään?*



Tehtävä 13 *Olkoon* $\mathcal{M}$ *malli ja* s *tulkintafunktio* $\mathcal{M}$*:lle. Olkoon* f *isomofismi* $\mathcal{M} \to \mathcal{M}'$. *Osoita, että on olemassa täsmälleen yksi tulkintafunktio* s' *mallille* $\mathcal{M}'$ *siten että* s *and* s' *ovat konjugaatteja* f*:n suhteen.*

Tehtävä 14 *Osoita, että seuraavat järjestetyt joukot ovate kaikki keskenään ei-isomorfisia:*

1. *Kokonaislukujen järjestys.*
2. *Luonnollisten lukujen järjestys.*
3. *Rationaalilukujen järjestys.*
4. *Reaalilukujen järjestys. (Tämä tapaus on hieman erilainen. Onko ylinumeroituvan ja numeroituvan joukon ero tuttu asia sinulle?)*

Tehtävä 15 *Olkoon* $L = \{R_0\}$. *Osoita, että isomorfiset* L*-mallit toteuttavat samat* L*-lauseet. (Vihje: Osoita induktiolla kaavan* A *subteen että jos* $f : M \cong M'$ *and* s *ja* s' *ovat konjugaatteja* f*:n suhteen, niin* $M \models_s A$ *jos ja vain jos* $M' \models_{s'} A$.*)*