

Johdatus tilastolliseen päättelyyn, 3. harjoitus (2.–13.4.2012, huomaa pääsiäistauko)

1. Ensimmäisellä luennolla tehdyn kyselyn perusteella naisopiskelijoiden pituuden (cm) otoskeskiarvo ja otosvarianssi ovat

$$\bar{y} = 168.14, \quad s^2 = 55.42,$$

ja otoskoko on $n = 36$. Analysoimme aineiston ajattelemalla, että vastaavat satunnaismuuttujat ovat satunnaisotos normaalijakaumasta $N(\mu, \sigma^2)$, jossa molemmat parametrit ovat tuntemattomia.

Mitkä ovat populaation odotusarvon μ ja sen varianssin σ^2 piste-estimaatit? Mikä on populaation keskihajonnan piste-estimaatti? Mikä on populaation odotusarvon estimaatin keskivirhe?

2. Tarkastellaan havaintoja y_1, \dots, y_n , jossa jokainen $y_i > 0$. Mallinamme havainnot niin, että niitä vastaavat satunnaismuuttujat ovat satunnaisotos gammajakaumasta $\text{Gamma}(\alpha, \lambda)$. Tällöin parametrien $\alpha > 0$ ja $\lambda > 0$ SU-estimaatteja ei saada ratkaistua suljetussa muodossa. Sen sijaan momenttimenetelmällä saadaan kätevät kaavat estimaateille. Johda ne.

Opastus: jos $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ niin (vrt. kaava (3.35))

$$EX = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad EX^2 = \text{var } X + (EX)^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2} + \frac{\alpha^2}{\lambda^2}$$

3. Laske tehtävän yksi aineiston perusteella naisopiskelijoiden populaation pituuden odotusarvolle 95 %:n t -luottamusväli käyttämällä kaavaa (4.17). Tarvittavan t -jakauman kvantiiliin voi lukea kääntöpuolen taulukosta (tai voit laskea sen tietokoneella).

4. Tahtoisimme saada naisopiskelijoiden keskimääräisen pituuden selville niin tarkasti, että kaksipuolisen 95 %:n t -luottamusvälin leveys olisi vain noin yksi senttimetri. Miten suuri otos tähän (osapuilleen) tarvittaisiin?

Opastus: t -luottamusvälin leveys on $2 t_{n-1}(0.05/2) s/\sqrt{n}$, jossa s on uudesta otoksesta laskettu otoskeskihajonta ja n on sen otoskoko. Tee approksimaatio $t_{n-1}(0.05/2) \approx 2$ ja arvioi, että uudesta otoksesta saadaan suunnilleen sama otoskeskihajonta kuin tehtävän yksi otoksesta. (Tässä on järkeä sen takia, että sekä tehtävän yksi otoskeskihajonta että uuden otoksen otoskeskihajonta estimoivat samaa populaatioparametria.)

5. Miespuolisten yliopisto-opiskelijoiden pituus noudattaa likimain normaalijakaumaa. Tehdyn otantatutkimuksen mukaan miesopiskelijoiden keskimääräisen pituuden μ (cm) 95 %:n luottamusväliksi saatiin [177, 183]. Mitkä seuraavista tulkinnoista ovat vääriä? Perustele väärien väiteiden kohdalla, miksi ne ovat väärin.

- μ :n todennäköisyysmassasta 95 % sijaitsee ko. välillä
- 95 % miehistä tässä populaatiossa kuuluu pituudeltaan ko. välille.
- Mikäli samanlainen otantatutkimus toistettaisiin useita kertoja, ja joka kerta laskettaisiin vastaava luottamusväli, niin μ kuuluisi noin 95 %:iin lasketuista väleistä.

t -jakauman u -yläkvantiileja $t_\nu(u)$ eri vapausasteluvun ν arvoilla. Tässä $u = P(Y \geq t_\nu(u))$, kun $Y \sim t_\nu$.

$\nu \backslash u$	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
1	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309
2	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
31	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375
32	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365
33	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356
34	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348
35	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
36	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333
37	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326
38	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319
39	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313
40	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
41	1.683	2.020	2.421	2.701	3.301
42	1.682	2.018	2.418	2.698	3.296
43	1.681	2.017	2.416	2.695	3.291
44	1.680	2.015	2.414	2.692	3.286
45	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
46	1.679	2.013	2.410	2.687	3.277
47	1.678	2.012	2.408	2.685	3.273
48	1.677	2.011	2.407	2.682	3.269
49	1.677	2.010	2.405	2.680	3.265
50	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261