## Johdatus tilastolliseen päättelyyn, 2. harjoitus (26.–30.3.2012)

**1.** Palaamme ensimmäisten harjoitusten ensimmäisen tehtävän tilastolliseen malliin. Parametrilla $\theta$ on kaksi vaihtoehtoista arvoa: 1 tai 2. Diskreetin satunnaismuuttujan $Y_i$ pistetodennäköisyysfunktion $g(y;\theta)$ arvot on taulukoitu alla. (Tavalliseen tapaan sovimme, että $g(y;\theta) = 0$ kaikilla niillä arvoilla $y$, joita ei ole mainittu.)

| $y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(y;1)$ | 0 | 0.3 | 0.4 | 0.2 | 0.1 |
| $g(y;2)$ | 0.1 | 0.4 | 0.3 | 0.1 | 0.1 |

Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1$ ja $Y_2$ ovat riippumattomia ja niillä on sama pistetodennäköisyysfunktio, joka on joko $g(y;1)$ tai $g(y;2)$. Tällöin niiden yptnf on

$$f(y_1, y_2; \theta) = g(y_1; \theta)\, g(y_2; \theta)$$

Havaitut arvot ovat $y_1 = 2$ ja $y_2 = 4$ ja parametri $\theta$ on tuntematon. Muodosta uskottavuusfunktio ja laske SU-estimaatti $\hat{\theta}$.

**2.** Johda pallot kulhossa -esimerkissä SU-estimaattorin $\hat{\theta}(\mathbf{Y})$ otantajakauma, ja esitä se graafisesti, kun kulhossa on $N = 5$ palloa, niistä $\theta = 2$ on valkoisia, ja nostoja tehdään $n = 7$ kappaletta palauttaen. Käytä hyväksi esimerkin 3.3 tietoa siitä, miten tässä tilanteessa SU-estimaatti saadaan laskettua. Tarvitset $\mathrm{Bin}(n, 2/5)$ jakauman pistetodennäköisyysfunktion arvot pisteissä $x = 0, 1, \ldots, 7$, ja nämä arvot ovat

$$\frac{1}{5^7}(2187, 10206, 20412, 22680, 15120, 6048, 1344, 128)$$

Laske lisäksi SU-estimaattorin harha, kun $\theta = 2$.

**3.** Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia, ja noudattavat kukin $\mathrm{Exp}(\theta)$-jakaumaa, jossa parametri $\theta > 0$. Eksponenttijakauman $\mathrm{Exp}(\theta)$ tiheysfunktio on

$$g(y;\theta) = \theta\, \mathrm{e}^{-\theta\, y}, \qquad y > 0.$$

(Tavalliseen tapaan sovimme, että tiheysfunktio on nolla niillä $y$:n arvoilla joita ei olla mainittu.) Muodosta havaintoja vastaavan satunnaisvektorin $\mathbf{Y}$ yhteistiheysfunktio $f(\mathbf{y};\theta)$.

**4.** (Jatkoa edelliseen tehtävään.) Muodosta uskottavuusfunktio sekä logaritminen uskottavuusfunktio, kun aineistossa $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ kukin $y_i > 0$. Näytä, että otoskeskiarvo $\bar{y}$ on tyhjentävä tunnusluku. Määritä SU-estimaatti $\hat{\theta}$.

**5.** Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia siten, että

$$EY_i = \mu, \quad \operatorname{var} Y_i = \sigma^2, \qquad \text{kaikilla } i.$$

a) Laske satunnaismuuttujan $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ odotusarvo ja varianssi.

b) Laske satunnaismuuttujan

$$Z = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu)^2 - n(\bar{Y} - \mu)^2.$$

odotusarvo. Yllä ensimmäinen yhtäsuuruus on määritelmä ja toinen seuraa ensimmäisissä harjoituksissa todistetusta kaavasta.