Epästationaariset aikasarjat kl 2012, HT 2, viikko 5

1. Jatkoa HT:lle 1.3 ja 1.4. Tarkastellaan HT:n 1.4 profiiliuskottavuusfunktiota $l^{(p)}(\Pi_1, \Omega)$, jonka maksimointi tuottaa parametrien Π_1 ja Ω SU–estimaattorit. Koska $l^{(p)}(\Pi_1, \Omega)$ on samaa muotoa kuin tehtävän 1 VAR(p)–mallin log–uskottavuusfunktio, voidaan siihen soveltaa edelleen profiiliuskottavuusfunktion ideaa. Mikä on näin saatava Π_1:n logaritmoitu profiiliuskottavuusfunktio, josta voidaan (halutessa) muodostaa maksimoimalla Π_1:n SU–estimaattori?

2. Olkoon $y_t \sim \mathrm{I}(1)$ ja $\Delta y_t = C(\mathsf{B})\varepsilon_t$, jossa $\varepsilon_t \sim \mathsf{iid}(0, \Omega)$ (sekä y_t että ε_t ovat $n \times 1$ ja Ω on positiivisesti definiitti) ja $C(\mathsf{B}) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \mathsf{B}^j$, $\sum_{j=1}^{\infty} j \|C_j\| < \infty$.
(i) Osoita, että prosessilla y_t on esitys

$$y_t = \mu + C(1)\sum_{j=1}^{t}\varepsilon_j + v_t, \quad t = 1, 2, ..., \qquad (*)$$

jossa μ ei riipu t:stä ja v_t:llä on lineaarinen esitys $v_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \varepsilon_{t-j}$, $\sum_{j=1}^{\infty} \|G_j\| < \infty$.
(ii) Millä matriisia $C(1)$ koskevalla ehdolla yhtälöstä $(*)$ seuraa prosessin y_t yhteisintegroituvuus eli milloin on olemassa (suurinta mahdollista) astetta r oleva $n \times r$ matriisi β siten, että $\beta' y_t \sim \mathrm{I}(0)$ ja milloin ei?

Vihje: Sovella ensimmäisessä kohdassa Liitteen A.4 yhtälöä (A.3) ja ratkaise sen jälkeen y_t. Toisessa kohdassa voi käyttää monisteessa s. 51 lopussa mainittua matriisin ortogonaalisen komplementin käsitettä. Jos A on astetta m oleva $n \times m$ matriisi $(m < n)$, niin sen ortogonaalisen komplementilla $A_\perp$ tarkoitetaan astetta $n - m$ olevaa $n \times (n - m)$ matriisia, jolla on ominaisuus $A'_\perp A = 0$ (tällaisen $A_\perp$:n olemassaolo seuraa lineaarialgebrasta).

3. Tarkastellaan mallin (5.7) erikoistapausta

$$\Delta x_t = \alpha\beta' x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, ...,$$

jossa α $(n \times r)$ ja β $(n \times r)$ ovat astetta r ja $\varepsilon_t \sim \mathsf{iid}(0, \Omega)$ (Ω positiivisesti definiitti). Oletetaan, että matriisi $\beta'\alpha$ $(r \times r)$ on epäsingulaarinen ja että matriisin $I_r + \beta'\alpha$ suurin ominaisarvo on itseisarvoltaan pienempi kuin 1. Osoita ilman Grangerin esityslausetta 5.1, että $(\beta' x_t, \alpha'_\perp \Delta x_t) \sim \mathrm{I}(0)$ ja $\alpha'_\perp x_t \sim \mathrm{I}(1)$.

Vihje: Muunna malliyhtälö kertomalla puolittain "sopivilla" matriiseilla (ks. myös VAR-prosessin stationaarisuusehto (2.9) ja sitä edeltävä keskustelu).

Huom.: Voidaan osoittaa, että Oletuksen 5.1 voimassa ollessa tehtävän oletukset ovat voimassa, joten ratkaisu todistaa Grangerin esityslauseen tapauksessa $p = 1$. Yleinen tapaus on periaatteessa samantapainen, mutta algebrallisesti hieman mutkikas. Tiedoksi myös, että tehtävässä matriiseista α ja β tehtyjen oletusten voimassa ollessa (mukaan lukien matriisin $\beta'\alpha$ $(r \times r)$ on epäsingulaarisuus) $n \times n$ matriisit $[\alpha : \beta_\perp]$ ja $[\beta : \alpha_\perp]$ ovat epäsingulaariset ja myös $(n - r) \times (n - r)$ matriisi $\alpha'_\perp \beta_\perp$ on epäsingulaarinen.

4. Tarkastellaan mallin (5.7) erikoistapausta

$$\begin{bmatrix} \Delta x_{1t} \\ \Delta x_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,t-1} \\ x_{2,tt-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{1,t-1} \\ \Delta x_{2,tt-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix},$$

jossa virhetermi on kuten edellisessä tehtävässä ja joka toteuttaa Oletuksen 5.1. Osoita ilman Grangerin esityslausetta 5.1, että tässä tapauksessa $\alpha_\perp = \beta$ ja $\alpha'_\perp x_t \sim \mathrm{I}(0)$ (α ja β kuten mallissa (5.7)).

Huom.: Tehtävä osoittaa, että vaikka yhtälöön (5.7) jää $\alpha'_\perp$:lla kertomalla vain prosessin x_t differenssejä, ei $\alpha'_\perp x_t$ ole välttämättä I(1)–prosessi (tämä antaa myös vihjeen miten tehtävän jälkimmäistä osaa voi lähteä ratkaisemaan).