Epästationaariset aikasarjat kl 2012, HT 1, viikko 4

Seuraavat tehtävät liittyvät tilastollisen päättelyn kurssilla määriteltyyn profiiliuskottavuusfunktioon (ks. Tilastollisen päättelyn kurssin luentomoniste (3. laitos), 2009, s. 83). Näiden tehtävien tulokset tulevat käyttöön kurssin loppupuolella tässä tarkasteltua yleisemmässä tilanteessa. Ne liittyvät toisaalta Moniulotteisen aikasarjojen kurssilla (2011) käsiteltyyn stationaarisen VAR(p)–mallin kerroinmatriisien SU–estimointiin (tai PNS–estimointiin).

Palautetaan ensin mieleen profiiliuskottavuusfunktion käsite. Olkoon $L(\theta_1, \theta_2)$ parametreista θ_1 ja θ_2 riippuva uskottavuusfunktio ja $\hat{\theta}_2(\theta_1)$ parametrin θ_2 SU–estimaattori, joka saadaan, kun parametrin θ_1 arvo kiinnitetään ja $L(\theta_1, \theta_2)$ maksimoidaan θ_2:n suhteen. Määritelmän mukaan parametrin θ_1 profiiliuskottavuusfunktio on tällöin $L^{(p)}(\theta_1) = L(\theta_1, \hat{\theta}_2(\theta_1))$ ja logaritmoitu profiiliuskottavuusfunktio on $l^{(p)}(\theta_1) = \log L^{(p)}(\theta_1)$. Lisäksi, jos $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ on parametrin $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ SU–estimaattori, niin $\hat{\theta}_1$ saadaan maksimoimalla profiiliuskottavuusfunktio $L^{(p)}(\theta_1)$.

Tarkastellaan luentomonisteen yhtälöä (4.3) $y_t = \Pi x_t + \varepsilon_t$, $t = 1, ..., T$, jossa $\varepsilon_t \sim \mathsf{nid}(0, \Omega)$, $x_t = \begin{bmatrix} 1 & y'_{t-1} & \cdots & y'_{t-p} \end{bmatrix}'$ ($(np+1) \times 1$) ja $\Pi = [\nu : A_1 : \cdots : A_p]$ ($n \times (np+1)$) (tehtävän kannalta ei ole olennaista, että x_t ja Π on määritelty näin, vaan kysymyksessä voisi olla mikä tahansa usean yhtälön normaalinen regressiomalli, jossa x_t on selittävien muuttujien vektori ja Π vastaava kerroinmatriisi). Moniulotteisten aikasarjojen kurssin HT:ssä 4.4 on todettu, että parametrimatriisin Π SU–estimaattori on (PNS–estimaattori)

$$\hat{\Pi} = \sum_{t=1}^{T} y_t x'_t \left(\sum_{t=1}^{T} x_t x'_t \right)^{-1}$$

ja että $\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t x'_t = 0$, kun $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{\Pi} x_t$. Huomaa myös, etteivät nämä tulokset vaadi tarkasteltavan VAR(p)–mallin toteuttavan monisteen stationaarisuusehtoa (2.9) (tai (2.12)).

1. Jatkoa HT:lle 4.4. Ositetaan monisteen yhtälö (4.3) muotoon $y_t = \Pi_1 x_{1t} + \Pi_2 x_{2t} + \varepsilon_t$, $t = 1, ..., T$. Olkoon $\hat{\Pi} = \left[\hat{\Pi}_1 : \hat{\Pi}_2 \right]$ vastaava parametrimatriisin Π SU–estimaattorin ositus. Määritellään $v_{0t} = y_t - \hat{\Phi}_0 x_{2t}$ ja $v_{1t} = x_{1t} - \hat{\Phi}_1 x_{2t}$, jossa

$$\hat{\Phi}_0 = \sum_{t=1}^{T} y_t x'_{2t} \left(\sum_{t=1}^{T} x_{2t} x'_{2t} \right)^{-1} \quad \text{ja} \quad \hat{\Phi}_1 = \sum_{t=1}^{T} x_{1t} x'_{2t} \left(\sum_{t=1}^{T} x_{2t} x'_{2t} \right)^{-1}.$$

(i) Osoita, että $\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t v'_{1t} = 0$ ja $\sum_{t=1}^{T} v_{it} x'_{2t} = 0$ $(i = 0, 1)$, kun $\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{\Pi} x_t$.

(ii) Osoita, että

$$\hat{\Pi}_1 = \sum_{t=1}^{T} y_t v'_{1t} \left(\sum_{t=1}^{T} v_{1t} v'_{1t} \right)^{-1} = \sum_{t=1}^{T} v_{0t} v'_{1t} \left(\sum_{t=1}^{T} v_{1t} v'_{1t} \right)^{-1}.$$

Vihje: Kohdassa (i) vrt. HT:n 4.4 loppu. Kohdassa (ii) voit lähteä identiteetistä $y_t = \hat{\Pi}_1 x_{1t} + \hat{\Pi}_2 x_{2t} + \hat{\varepsilon}_t$, manipuloida sitä "sopivasti", jotta saat v_{1t}:n oikealle puolelle, ja sen jälkeen kertoa "sopivalla" transponoidulla vektorilla ja summata yli $t = 1, ..., T$. Käyttäen kohdan (i) ortogonaalisuusominaisuuksia saat ensimmäisen $\hat{\Pi}_1$:n esityksen. Toinen seuraan ensimmäisestä huomaamalla "sopiva" ortogonaalisuusominaisuus.

2. Käyttäen edellä profiiliuskottavuusfunktion yhteydessä esitettyjä merkintöjä johda $\hat{\Omega}(\Pi)$:n lauseke ja osoita, että $l^{(p)}(\Pi) = -\frac{T}{2} \log \det \hat{\Omega}(\Pi) - \frac{Tn}{2}$, kun VAR(p)–malli on kirjoitettu kuten monisteen yhtälössä (4.3).

Vihje: Edellisessä kohdassa kovarianssimatriisin Ω SU–estimaattorin johto monisteen s. 24-25. Jälkimmäisessä kohdassa moniulotteisten aikasarjojen kurssin HT 5.5(ii).

3. Oletetaan tehtävän 1 tilanne. Käyttäen edellä esitettyjä merkintöjä johda $\hat{\Pi}_2(\Pi_1)$:n lauseke ja osoita, että $\hat{\Pi}_2(\Pi_1) - \hat{\Phi}_0 + \Pi_1 \hat{\Phi}_1 = 0$.

Vihje: Kiinnitä ensimmäisessä kohdassa Π_1 ja menettele estimaattorin johdossa kuten monisteen jaksossa 4.1. Jälkimmäisessä kohdassa suora lasku.

4. Jatkoa edelliselle. Osoita, että

$$l^{(p)}(\Pi_1, \Omega) = -\frac{T}{2} \log \det(\Omega) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} (v_{0t} - \Pi_1 v_{1t})' \, \Omega^{-1} (v_{0t} - \Pi_1 v_{1t}).$$