Algebra I

Luento 25.1.2012

Helsingin yliopisto

- Lue kurssikirjaa!
- Käy pajassa! Siellä kannattaa tehdä tehtäviä ja kysyä neuvoa korjauksiin.
- Älä lannistu liekeistä. Virheistä oppii.
- Ole varovainen tehtävässä 3 (rationaalilukutehtävä).
- Harjoituksen 1 kellotaulua käsittelevässä tehtävässä 9 tarvitaan pieni perustelu. Riittää vaikkapa vain todeta, että $13 \oplus x = x$ ja $x \oplus 13 = x$ kaikilla $x \in K_{13}$ jne.

Joukko G laskutoimituksella $\cdot$ varustettuna on ryhmä, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(G0) Laskutoimitus $\cdot$ on määritelty joukossa G, eli kaikilla alkioilla $x, y \in G$ pätee $x \cdot y \in G$

(G1) Laskutoimitus $\cdot$ on liitännäinen

(G2) Joukossa G on neutraalialkio laskutoimitukselle $\cdot$

(G3) Jokaisella G:n alkiolla a on käänteisalkio a^{-1} laskutoimituksen $\cdot$ suhteen

Esimerkki

- Olkoon A joukko.

- Merkitään $S_A = \{f \colon A \to A \mid f \text{ on kääntyvä}\}$

- S_A on ryhmä, kun laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen $\circ$

Esimerkki

- Joukko $K_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ on ryhmä, kun laskutoimituksena on kellotaulusumma. (Kurssikirjassa on tässä kohtaa pieni virhe.)

- Rubikin kuution kaikki siirrot muodostavat ryhmän. Laskutoimituksena siirtojen tekeminen peräkkäin.

Potenssimerkintä

Olkoon G ryhmä. Oletetaan, että $x \in G$ ja $n \geq 1$ on kokonaisluku.

- $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ kpl}}$.
- $x^0 = e$
- $x^{-n} = (x^n)^{-1}$

Potenssien laskusääntöjä

Olkoon G ryhmä ja x sen alkio. Seuraavat kaavat pätevät kaikilla kokonaisluvuilla m ja n:

- $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$
- $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
- $(x^n)^m = x^{mn}$

Monikerta

Kun ryhmän laskutoimitusta merkitään yhteenlaskuna, potensseja kutsutaan monikerroiksi.

Tällöin laskusäännöt saavat muodon

- $nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ kpl}}$
- $0 \cdot x = e$
- $(-n)x = n(-x)$

Aliryhmä

- Ryhmä, joka sisältyy toiseen ryhmään.

Aliryhmän määritelmä

Oletetaan, että $(G, \cdot)$ on ryhmä ja $H \subset G$. Pari $(H, \cdot)$ on ryhmän $(G, \cdot)$ *aliryhmä*, jos

(H1) H on vakaa laskutoimituksen suhteen, eli jos $g, h \in H$, niin $gh \in H$.

(H2) ryhmän G neutraalialkio on joukossa H.

(H3) joukko H sisältää kaikkien alkioidensa käänteisalkiot eli $g^{-1} \in H$ kaikilla $g \in H$.

Tällöin merkitään $(H, \cdot) \leq (G, \cdot)$ tai lyhyemmin $H \leq G$

Esimerkkejä aliryhmistä

- $(\mathbb{Z},+) \leq (\mathbb{Q},+)$
- $(\mathbb{Q},+) \leq (\mathbb{R},+)$
- Millä tahansa ryhmällä G on triviaalit aliryhmät G ja $\{e\}$

Esimerkkejä aliryhmistä

- Ryhmällä $(\mathbb{Z}, +)$ on aliryhmä $3\mathbb{Z} = \{3z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

- Kellotauluryhmällä K_{12} on aliryhmä $H = \{3, 6, 9, 12\}$.

Mitkä seuraavista ovat kellotauluryhmän K_{12} aliryhmiä?