Algebra I

Luento 24.4.2012

Helsingin yliopisto

Luennon aiheet

- Ryhmien homomorfialause
- Polynomien jaollisuus

Ryhmien homomorfialause

- Ryhmäisomorfismit ovat bijektiivisiä ryhmähomomomorfismeja.

- Homomorfialause: Jokaisesta ryhmähomomorfismista saadaan isomorfismi, kun siirrytään tarkastelemaan erästä tekijäryhmää.

Ryhmien homomorfialause

Olkoot G ja H ryhmiä, ja olkoon $f\colon G \to H$ ryhmähomomorfismi. Tällöin

$$G/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f.$$

Isomorfismina toimii kuvaus

$$\bar{f}\colon G/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f, \quad a\operatorname{Ker} f \mapsto f(a).$$

- Homomorfialauseeseen tiivistyy tekijäryhmien idea.
- Siirtymällä tekijäryhmään, saadaan aikaan haluttu ominaisuus. (Tässä tapauksessa injektiivisyys.)
- Tekijäryhmässä samastetaan kaikki ne alkiot, joiden halutaan olevan samoja.

Esimerkki

Ryhmällä $\mathbb{Z}_6$ on normaali aliryhmä $N = \{[0]_6, [3]_6\}$.

Osoitetaan, että $\mathbb{Z}_6/N \cong \mathbb{Z}_3$.

Ryhmän $\mathbb{Z}_6/N$ yhteenlaskutaulu:

$+$	N	$[1]+N$	$[2]+N$
N	N	$[1]+N$	$[2]+N$
$[1]+N$	$[1]+N$	$[2]+N$	N
$[2]+N$	$[2]+N$	N	$[1]+N$

Jakoyhtälö

Olkoon K kunta, ja olkoot $P, S \in K[X]$. Oletetaan, että $S \neq 0$.

Tällöin on olemassa yksikäsitteiset $Q, R \in K[X]$, joille pätee

$$P = QS + R$$

ja joko $R = 0$ tai $\deg(R) < \deg(S)$.

Juuret ja jaollisuus

Olkoon K kunta.

Polynomilla $P \in K[X]$ on juuri $c \in K$, jos ja vain jos P on jaollinen polynomilla $X - c$.

Lause

Olkoon K kunta ja $P \in K[X]$ nollasta poikkeava polynomi.

Polynomin P juurten lukumäärä on korkeintaan deg(P).