Algebra I

Luento 21.3.2012

Helsingin yliopisto

Luennon aiheet

- Renkaat
- Alirenkaat
- Polynomit

Renkaan määritelmä

Joukko R kahdella laskutoimituksella $+$ ja $\cdot$ varustettuna on rengas, jos

(R1) Pari $(R, +)$ on vaihdannainen ryhmä.

(R2) Laskutoimitus $\cdot$ on liitännäinen.

(R3) Laskutoimituksella $\cdot$ on neutraalialkio.

(R4) Kaikilla $a, b, c \in R$ pätevät osittelulait:

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{ja} \quad (a + b)c = ac + bc.$$

Esimerkki

Funktiorengas $(F(\mathbb{R}), +, \cdot)$

Esimerkki

Boolen rengas

Laskusääntöjä

Renkaassa R pätevät seuraavat ehdot kaikilla $a, b \in R$:

a) $0_R \cdot a = a \cdot 0_R = 0_R$

b) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$

c) $(-a)(-b) = ab$.

Kaikki tutut säännöt eivät välttämättä päde!

$(a + b)(a - b)$

Kaikki tutut säännöt eivät välttämättä päde!

Merkitään $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ja $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Nyt

$$(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kokonaisluvut renkaan alkioina

Olkoon R rengas ja n kokonaisluku.

Luvun n ajatellaan vastaavan renkaan alkiota $n \cdot 1_R$.

Lemma

Olkoon R rengas, ja olkoon $a \in R$. Kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ pätee

$$na = (n \cdot 1_R)a.$$

Alirengas

- Rengas on yhteenlaskun suhteen ryhmä, joten alirenkaan halutaan olevan yhteenlaskun suhteen aliryhmä.

- Renkaissa ei tarvitse olla käänteisalkioita, joten alirenkaassakaan ei tarvitse olla käänteisalkioita.

- Muiden aliryhmäehtojen halutaan pätevän kertolaskun suhteen.

Alirengas

Oletetaan, että $(R, +, \cdot)$ on rengas ja $S \subset R$. Kolmikko $(S, +, \cdot)$ on renkaan $(R, +, \cdot)$ alirengas, jos

(AR1) Pari $(S, +)$ on ryhmän $(R, +)$ aliryhmä.

(AR2) Kaikilla $a, b \in S$ pätee $ab \in S$.

(AR3) $1_R \in S$.

Esimerkki

- Rengas $\mathbb{Q}$ on renkaan $\mathbb{R}$ alirengas.

- Rengas $\mathbb{Z}$ on renkaan $\mathbb{Q}$ alirengas.

Esimerkki

Entä renkaan $\mathbb{Z}$ alirenkaat?

Esimerkki

Renkaalla $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ on alirengas

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Alirenkaat poikkeavat aliryhmistä

Toiseen renkaaseen sisältyvän renkaan ei tarvitse olla alirengas.

POLYNOMIT

Polynomit

Olkoon R vaihdannainen rengas. Yhden tuntemattoman R-kertoimista polynomia ajatellaan äärellisenä summana

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n,$$

missä $n \in \mathbb{N}$ ja $a_k \in R$ kaikilla k.

Kaikkien tällaisten polynomien joukkoa merkitään $R[X]$.

Polynomit äärettöminä summina

- On helpointa sopia, että polynomeja kuvaavat summat ovat itse asiassa äärettömiä.

- Jostakin indeksistä lähtien kaikki kertoimet vain ovat nollia.

- Voidaan siis kirjoittaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k.$$

Polynomien summa

Jos

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$$

ja

$$Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k,$$

niin

$$\begin{aligned} P + Q &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) X^k. \end{aligned}$$

Polynomien tulo

$$PQ = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) X + \cdots$$

Mikä polynomissa on oleellista

- Jokainen polynomi määräytyy täysin kertoimiensa perusteella.

- Tuntematonta X tarvitaan vain kertomaan, missä kohdassa summaa kukin kerroin esiintyy.

Jonomerkintä

Olkoon R vaihdannainen rengas. Tällöin R-kertoiminen polynomi on ääretön jono

$$(a_k) = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots),$$

missä $a_k \in R$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja vain äärellisen moni a_k poikkeaa nollasta.

Laskutoimitukset jonomerkinnöillä

$$(a_k) + (b_k) = (c_k), \quad \text{missä} \quad c_k = a_k + b_k \quad \text{kaikilla } k \in \mathbb{N}$$

$$(a_k) \cdot (b_k) = (c_k), \quad \text{missä} \quad c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j \quad \text{kaikilla } k \in \mathbb{N}.$$

Polynomin aste

Olkoon $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$ polynomi, jolle pätee $a_n \neq 0$.

Lukua n kutsutaan polynomin asteeksi.