

Algebra I

Luento 20.3.2012
Helsingin yliopisto

Ajankohtaista

- Koepaperit nähtävillä pajassa ensi ma klo 12-14.
- Pajan aukioloajat ovat muuttuneet hieman.
- Tänään ryhdytään puhumaan renkaista.

Kaksi laskutoimitusta

- Esimerkiksi kokonaislukujen joukossa \mathbb{Z} voidaan määrittellä yhteenlasku ja kertolasku.
- Yhteenlaskun suhteen kyseessä on ryhmä.
- Kertolaskun suhteen saadaan melkein ryhmä. Vain käänteisalkiot puuttuvat.
- Tiedetään, miten laskutoimitukset käyttäytyvät yhdessä: osittelulait.

Renkaan määritelmä

Joukko R kahdella laskutoimituksella $+$ ja \cdot varustettuna on rengas, jos

(R1) Pari $(R, +)$ on vaihdannainen ryhmä.

(R2) Laskutoimitus \cdot on liitännäinen.

(R3) Laskutoimituksella \cdot on neutraalialkio.

(R4) Kaikilla $a, b, c \in R$ pätevät *osittelulait*:

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{ja} \quad (a + b)c = ac + bc.$$

Esimerkkejä renkaista

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
- Joukko \mathbb{Z}_n on rengas, kun se varustetaan jäännösluokkien yhteen- ja kertolaskuilla

Merkintöjä

- Laskutoimitusta $+$ kutsutaan renkaan yhteenlaskuksi.
- Yhteenlaskun neutraalialkiota sanotaan nolla-alkioksi ja merkitään symbolilla 0 tai 0_R .
- Alkion a käänteisalkiota yhteenlaskun suhteen nimitetään vasta-alkioksi, ja sille käytetään merkintää $-a$.
- Lyhennysmerkintää $a - b$ tarkoittaa alkiota $a + (-b)$.

Merkintöjä

- Laskutoimitusta \cdot kutsutaan renkaan kertolaskuksi
- Kertolaskun neutraalialkiota sanotaan ykkösalkioksi ja merkitään symbolilla 1 tai 1_R .
- Jos renkaan kertolasku on vaihdannainen laskutoimitus, kutsutaan rengasta vaihdannaiseksi.

Esimerkki

- $n \times n$ -matriisien joukko $M_n(\mathbb{R})$ on rengas, kun se varustetaan matriisien yhteen ja kertolaskulla
- Matriisirengas $M_n(\mathbb{R})$ ei ole vaihdannainen (kun $n \geq 2$).

Esimerkki

Funktioengas