# Algebra I

Luento 17.4.2012

Helsingin yliopisto

**Luennon aiheet**

- Muutama huomio laskuharjoitustehtävistä

- Ryhmähomomorfismi

**Seuraavat harjoitukset**

- Tähtitehtäviä ei ole, joten tähtitehtäväkertoimeksi tulee 1.

- Yrityksen pitää olla rehellinen, jotta saisi pisteitä.

- Harjoituksissa käsiteltävät asiat tulevat kokeeseen, joten tehtävät kannattaa tehdä huolellisesti.

## VANHOJA TEHTÄVIÄ

**Mistä tietää löytäneensä kaikki sivuluokat?**

- Jos ryhmä on äärellinen, voi vain tarkistaa, että sivuluokissa on kaikki ryhmän alkiot tai käyttää Lagrangen lausetta.

- Jos ryhmä on ääretön, ei kaikkia alkioita voi käydä läpi. Siksi esimerkiksi joukon $4\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ alkioiden määrittäminen on hankalampaa.

## Alirenkaan ehdot: vasta-alkioiden tarkistaminen

Eräässä tehtävässä piti osoittaa, että

$$S = \{a/5^n \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

on renkaan $\mathbb{Q}$ alirengas. Pohditaan vasta-alkioita koskevaa ehtoa.

- Joukon $S$ alkioilla on vasta-alkiot renkaassa $\mathbb{Q}$.

- Lisäksi vasta-alkioiden tiedetään olevan vasta-lukuja.

- Täytyy vain osoittaa, että jokaisen $S$:n alkion vasta-alkio on joukossa $S$.

## Alleviivaukset kertotaulussa

- Alleviivaukset eivät tarkoita mitään, ellet kerro, miksi ne piirsit.

- Jos haluaa osoittaa, että kaikki renkaan alkiot (nollaa lukuunottamatta) ovat yksiköitä, on varminta luetella alkioiden käänteisalkiot.

## RYHMÄHOMOMORFISMI

- Jos ryhmien välillä on isomorfismi, ryhmät ovat täysin samanlaiset.

- Ryhmähomomorfismissa isomorfismin ehtoja höllennetään.

**Määritelmä**

Olkoot $G$ ja $H$ ryhmiä. Kuvaus $f: G \to H$ on ryhmähomomorfismi, jos kaikilla $x, y \in G$ pätee

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

## Homomorfismin ominaisuuksia

Oletetaan, että $f\colon G \to H$ on ryhmähomomorfismi ja $g \in G$. Tällöin

a) $f(e_G) = e_H$

b) $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$

c) $f(g^k) = f(g)^k$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.

## Syklisen ryhmän homomorfismit

Tuloksesta c) seuraa, että syklisessä ryhmässä virittäjän arvo määrää kaikki homomorfismin arvot.

Onko olemassa homomorfismia $f\colon \mathbb{Z}_6 \to S_3$, jolle pätee $f([1]_6) = (123)$?

$$f : \mathbb{Z}_6 \to S_3,\ f([k]_6) = (123)^k$$

$$
\begin{aligned}
f([0]_6) &= (123)^0 = (1), & f([3]_6) &= (123)^3 = (1), \\
f([1]_6) &= (123)^1 = (123), & f([4]_6) &= (123)^4 = (123), \\
f([2]_6) &= (123)^2 = (132), & f([5]_6) &= (123)^5 = (132).
\end{aligned}
$$

## Aliryhmät ja homomorfismit

Ryhmähomomorfismissa

- aliryhmän kuva on aliryhmä.
- aliryhmän alkukuva on aliryhmä.

## Aliryhmät ja homomorfismit

Olkoon $f\colon G \to G'$ ryhmähomomorfismi. Oletetaan, että $H \leq G$ ja $H' \leq G'$. Tällöin

a) $fH \leq G'$

b) $f^{\leftarrow}H' \leq G$