

Algebra I

Luento 14.3.2012
Helsingin yliopisto

Luennon aiheet

- Sivuluokat
- Lagrangen lause

Paljonko tällä kursilla pitäisi opiskella?

- Opiskelua yhteensä noin 14 h viikossa
- Luentoja 3 h
- Muuta opiskelua noin 11 h
 - tehtävien tekemistä pajassa ja muualla
 - tehtyjen tehtävien tarkistamista malliratkaisuista
 - kurssikirjan lukemista

Mitä viime luennolla tehtiin?

Olkoon G ryhmä, $H \leq G$ ja $a \in G$.

- Joukko $aH = \{ah \mid h \in H\}$ on aliryhmän H sivuluokka.
- Sivuluokat yleistävät jäännösluokan käsitettä.

Sivuluokat liittyvät ekvivalenssirelaatioon

Sivuluokat ovat erään ekvivalenssirelaation ekvivalenssiluokkia.

Määritellään ryhmän G relaatio \sim seuraavasti:

$$a \sim b, \quad \text{jos} \quad a^{-1}b \in H.$$

Relaatio \sim on ekvivalenssirelaatio.

Ekvivalenssirelaatio

Olkoon R joukon A relaatio. Kyseessä on ekvivalenssirelaatio, jos kaikilla $a, b, c \in A$ pätee

1. aRa .
2. Jos aRb , niin bRa .
3. Jos aRb ja bRc , niin aRc .

Sivuluokat ovat ekvivalenssiluokkia

- Ryhmän G ekvivalenssirelaatiolle \sim pätee

$$[a]_{\sim} = aH.$$

- Koska sivuluokat ovat ekvivalenssiluokkia, ne muodostavat osituksen.

Merkintä

G/H on aliryhmän H vasempien sivuluokkien joukko

Esimerkki

Määritetään ryhmän \mathbb{Z}_{12} aliryhmän $H = \{[0], [4], [8]\}$ sivuluokat.

Toisin sanoen, määritetään joukko \mathbb{Z}_{12}/H .

Esimerkki

Määritetään ryhmän $(\mathbb{Q}, +)$ aliryhmän \mathbb{Z} sivuluokat.

Lause

Olkoon G ryhmä, jolla on aliryhmä H , ja olkoot $a, b \in G$.

Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

a) $a^{-1}b \in H$

b) $a \in bH$

c) $b \in aH$

d) $aH = bH$.

Lagrangen lauseen idea

- Aliryhmän sivuluokissa näyttää olevan aina yhtä monta alkiota.
- Tästä seuraa, että aliryhmän kertaluku jakaa koko ryhmän kertaluvun.

Merkintä

Aliryhmän H vasempien sivuluokkien lukumäärää merkitään $[G : H]$.

Lagrangen lause

Olkoon G äärellinen ryhmä, jolla on aliryhmä H .

Aliryhmän H kertaluku jakaa ryhmän G kertaluvun, ja

$$[G : H] = \frac{|G|}{|H|}.$$

Lagrangen lauseen sovellus

Äärellisessä ryhmässä alkion kertaluku jakaa ryhmän kertaluvun.

Lagrangen lauseen sovellus

Jos ryhmän kertaluku on alkuluku, ryhmä on syklinen.