Algebra I

Luento 13.3.2012

Helsingin yliopisto

Luennon aiheet

- Muutama käytännön asia
- Sivuluokat

Kurssikoe

- Kurssikokeessa hienoja vastauksia!
- Tulokset tulevat lähipäivien aikana.

Tehtävien palautus

- Viimeinen palautuspäivä siirtyy perjantaista seuraavan viikon keskiviikoksi.

- Tällä viikolla ylimääräiset harjoitukset, jotka palautetaan huomenna.

Kertausta: Ekvivalenssirelaatio

- Ekvivalenssiluokista saadaan ositus.

- Ryhdymme tutkimaan ryhmiin liittyviä osituksia.

Jäännösluokat

- Kongruenssi modulo n on ekvivalenssirelaatio.

- Ekvivalenssiluokkina ovat jäännösluokat.

- Niiden avulla on kätevää laskea vaikkapa suurten lukujen jakojäännöksiä.

- Yleistetään tämä kaikille ryhmille.

Suurten lukujen jäännösluokat

Mitä jää jakojäännökseksi, kun luku $590 + 6^{100}$ jaetaan luvulla 7?

Esimerkki

Kirjoitetaan jäännösluokat modulo 3 toisessa muodossa.

Sivuluokka

Olkoon G ryhmä ja H sen aliryhmä. Joukkoa

$$aH = \{ah \mid h \in H\}$$

kutsutaan aliryhmän H vasemmaksi sivuluokaksi.

Tavoite

- Osoitetaan, että vasempien sivuluokkien joukko on ositus.

- Tehdään tämä etsimällä ekvivalenssirelaatio, jonka ekvivalenssiluokkia sivuluokat ovat.

Jäännösluokkien ekvivalenssirelaatio

$$a \equiv b \pmod 3 \quad \text{jos ja vain jos} \quad -a + b \in 3\mathbb{Z}.$$

Ekvivalenssirelaatio yleisessä tapauksessa

Olkoon G ryhmä ja H sen aliryhmä.

Määritellään ryhmän G relaatio $\sim$ seuraavasti:

$$a \sim b, \quad \text{jos} \quad a^{-1}b \in H.$$

Lause

Relaatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.

Ekvivalenssirelaatio

Olkoon R joukon A relaatio. Kyseessä on ekvivalenssirelaatio, jos kaikilla $a, b, c \in A$ pätee

1. aRa.
2. Jos aRb, niin bRa.
3. Jos aRb ja bRc, niin aRc.

Miltä relaation ekvivalenssiluokat näyttävät?

Ekvivalenssiluokka

Olkoon $\sim$ joukon A ekvivalenssirelaatio.

Alkion $a \in A$ ekvivalenssiluokka on

$$[a]_{\sim} = \{b \in A \mid b \sim a\}.$$

Lause

Ryhmän G ekvivalenssirelaatiolle $\sim$ pätee

$$[a]_\sim = aH.$$

Esimerkki

Määritetään ryhmän S_3 aliryhmän $H = \{(1), (12)\}$ sivu-
luokat.

Lause

Olkoon G ryhmä, jolla on aliryhmä H, ja olkoot $a, b \in G$.

Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

a) $a^{-1}b \in H$

b) $a \in bH$

c) $b \in aH$

d) $aH = bH$.