Algebra I

Luento 8.2.2012

Helsingin yliopisto

- Tarkista ratkaisusi malleista. Kokeessa pelkkä rehellinen yritys ei enää tuo pisteitä.

- Tähdettömätkin tehtävät kannattaa tehdä huolellsesti. Kokeeseen tulee todennäköisesti samankaltaisia tehtäviä. (Ylipäätään tarkoituksena oppiminen eikä pisteiden kerääminen.)

- Tähdettömiä tehtäviä tarkistetaan pistokokeilla. Jos et ole oikeasti yrittänyt tehtävää, siitä ei saa pistettä.

Isomorfismin määritelmä

Olkoot $(G, *)$ ja $(H, \circ)$ ryhmiä. Kuvaus $f\colon G \to H$ ryhmäisomorfismi, jos seuraavat ehdot pätevät:

(IM1) Kuvaus f on bijektio.

(IM2) Kaikilla ryhmän G alkioilla x ja y pätee

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y).$$

Jos ryhmien välillä on isomorfismi, sanotaan, että ryhmät ovat isomorfiset. Tällöin merkitään $(G, *) \cong (H, \circ)$.

Laiskuuttaan matemaatikot kirjoittavat usein näin:

Olkoot G ja H ryhmiä. Kuvaus $f\colon G \to H$ ryhmäisomorfismi, jos seuraavat ehdot pätevät:

(IM1) Kuvaus f on bijektio.

(IM2) Kaikilla ryhmän G alkioilla x ja y pätee

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Jos ryhmät ovat isomorfiset, merkitään $G \cong H$

Esimerkki

Ryhmät $(\mathbb{Z}, +)$ ja $(3\mathbb{Z}, +)$ ovat isomorfiset.

Esimerkki

Ryhmät $(\mathbb{R}, +)$ ja $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ ovat isomorfiset.

Tuloksia

Isomorfismissa

- neutraalialkio kuvautuu neutraalialkioksi.

- käänteisalkiot kuvautuvat käänteisalkioiksi

- potenssit kuvautuvat potensseiksi

Väite

Oletetaan, että $f: G \to H$ on ryhmäisomorfismi. Tällöin

$$f(e_G) = e_H.$$

Tuloksia

- Identtinen kuvaus on isomorfismi.
- Isomorfismin käänteiskuvaus on isomorfismi.
- Kahden isomorfismin yhdistetty kuvaus on isomorfismi.

Väite

Oletetaan, että $f\colon G \to H$ ja $g\colon H \to K$ ovat ryhmäisomorfismeja. Tällöin yhdistetty kuvaus $g \circ f\colon G \to K$ on isomorfismi.

Seurauksia

Oletetaan, että G, H ja K ovat ryhmiä. Tällöin

- $G \cong G$
- jos $G \cong H$, niin $H \cong G$
- jos $G \cong H$ ja $H \cong K$, niin $G \cong K$

Ryhmä S_3

- $S_3 = \{ (1), (23), (13), (12), (123), (132) \}$

- Merkitään

$$
\begin{aligned}
1 &= (1) \\
\rho_1 &= (123) \\
\rho_2 &= (132) \\
\sigma_1 &= (12) \\
\sigma_2 &= (23) \\
\sigma_3 &= (13)
\end{aligned}
$$

Ryhmän S_3 kertotaulu

$\cdot$	1	ρ_1	ρ_2	σ_1	σ_2	σ_3
1	1	ρ_1	ρ_2	σ_1	σ_2	σ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	1	σ_3	σ_1	σ_2
ρ_2	ρ_2	1	ρ_1	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	1	ρ_1	ρ_2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	ρ_2	1	ρ_1
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	ρ_1	ρ_2	1

Ryhmän S_3 kertotaulu

$\cdot$	1	ρ_1	ρ_2	σ_1	σ_2	σ_3
1	1	ρ_1	ρ_2	σ_1	σ_2	σ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	1	σ_3	σ_1	σ_2
ρ_2	ρ_2	1	ρ_1	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	1	ρ_1	ρ_2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	ρ_2	1	ρ_1
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	ρ_1	ρ_2	1

Ryhmän S_3 aliryhmät

- Millainen voi olla aliryhmä, joka sisältää alkion $\rho_1 = (123)$?

Ryhmän S_3 aliryhmät

- Millainen voi olla aliryhmä, joka sisältää alkiot $\rho_1 = (123)$ ja $\sigma_1 = (12)$?

Ryhmän S_3 aliryhmät

- Millainen voi olla aliryhmä, joka sisältää alkion $\sigma_1 = (12)$?

Ryhmän S_3 aliryhmät

- $\{1\}, \quad \{1, \rho_1, \rho_2\}, \quad \{1, \sigma_1\}, \quad \{1, \sigma_2\}, \quad \{1, \sigma_3\}, \quad S_3.$

- eli

$$\begin{aligned}
&\{(1)\}, \\
&\{(1), (123), (132)\}, \\
&\{(1), (12)\}, \quad \{(1), (23)\}, \quad \{(1), (13)\}, \\
&S_3
\end{aligned}$$

Virittäminen

- Olkoon G ryhmä ja g sen alkio. Pienintä aliryhmää, joka sisältää alkion g, kutsutaan alkion g virittämäksi aliryhmäksi.

- Tätä aliryhmää merkitään symbolilla $\langle g \rangle$.

- Alkiota g kutsutaan aliryhmän $\langle g \rangle$ virittäjäksi.

Tulos

Ryhmän G alkion g virittämä aliryhmä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Vielä parempi tulos

Olkoon G ryhmä ja $g \in G$. Oletetaan, että positiiviselle kokonaisluvulle n pätee $g^n = e$. Tällöin

$$\langle g \rangle = \{e, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}.$$