Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2012
Harjoitus 8

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ke 21.3.2012 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: ke 4.4.2012 klo 18.00

Näissä laskuharjoituksissa käsiteltäviä uusia asioita ovat

- Sivuluokat
- Lagrangen lause

Tehtävä I

1. Määritellään reaalilukuparien relaatio $\sim$ seuraavasti:
$$(x, y) \sim (x', y'), \quad \text{jos } x = ax' \text{ ja } y = ay' \text{ jollakin } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
Toisin sanoen kyseessä on reaalitason vektoreiden relaatio
$$\overline{v} \sim \overline{w}, \quad \text{jos } \overline{v} = a\overline{w} \text{ jollakin } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.

2. Mikä on edellisessä tehtävässä alkion $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ekvivalenssiluokka? Millainen geometrinen tulkinta ekvivalenssiluokalla on?

Tehtävä II

Tutustu kurssikirjan lukuihin 10.1 ja 10.2, joissa käsitellään aliryhmän sivuluokkia.

3. Tutkitaan ryhmän $\mathbb{Z}$ aliryhmää $8\mathbb{Z}$. Määritä sivuluokan $5 + 8\mathbb{Z}$ alkiot.

4. Tutkitaan ryhmänn S_3 aliryhmää $B = \{(1), (23)\}$. Määritä sivuluokan $(12)B$ alkiot.

5. Ryhmällä $(\mathbb{R}, +)$ on aliryhmä $\mathbb{Q}$. Päättele määrittämättä sivuluokkien alkioita, ovatko sivuluokat $2 + \mathbb{Q}$ ja $\sqrt{3} + \mathbb{Q}$ samat. Määritä sivuluokka $1 + \mathbb{Q}$.

6.* Ryhmällä S_6 on aliryhmä
$$H = \{(1), (13), (16), (36), (136), (163)\}.$$
Ovatko sivuluokat $(135)(426)H$ ja $(15)(2634)H$ samat? Ratkaise tehtävä määrittämättä sivuluokkien alkioita.

Tehtävä III

7. Määritä ryhmän S_3 aliryhmän $B = \{(1), (13)\}$ vasemmat sivuluokat eli määritä joukko S_3/B.

8. Tutkitaan ryhmää $G = \{1, a, b, c, d, e, f, g, h\}$, jolla on oheinen kertotaulu. Ryhmällä G on aliryhmä $H = \{1, c, f\}$. Määritä aliryhmän H vasempien sivuluokkien joukko G/H.

$\cdot$	1	a	b	c	d	e	f	g	h
1	1	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	c	d	e	f	g	h	1
b	b	c	d	e	f	g	h	1	a
c	c	d	e	f	g	h	1	a	b
d	d	e	f	g	h	1	a	b	c
e	e	f	g	h	1	a	b	c	d
f	f	g	h	1	a	b	c	d	e
g	g	h	1	a	b	c	d	e	f
h	h	1	a	b	c	d	e	f	g

Tehtävä IV

Oletetaan, että G on ryhmä ja H sen aliryhmä. Olkoot $a, b \in G$. Täydennä lemman 10.5 todistus eli todista seuraavat väitteet.

9. Jos $b \in aH$, niin $aH = bH$.

10.* Jos $aH = bH$, niin $a^{-1}b \in H$.

Tehtävä V

Lue Lagrangen lausetta käsittelevät luku 10.3.

11.* Ryhmällä $\mathbb{Z}_{16}$ on aliryhmä $H = \{[0]_{16}, [4]_{16}, [8]_{16}, [12]_{16}\}$. Mitä Lagrangen lause kertoo aliryhmän H indeksistä eli (vasempien) sivuluokkien lukumäärästä? Määritä sivuluokat.

12. Määritä kaikki ryhmän $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ aliryhmät. Lagrangen lauseesta on apua.

Tehtävä VI

Tutkitaan, voiko rationaalilukujen joukolle määritellä laskutoimitusta ehdolla

$$\frac{n}{m} * \frac{k}{l} = \frac{2n + 2k}{m},$$

missä $n, m, k, l \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ ja $l \neq 0$. Huomataan, että $1/2 = 2/4$, mutta kuitenkin

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{4}{2} = 2$$

ja

$$\frac{2}{4} * \frac{1}{3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \neq 2.$$

Tästä voidaan päätellä, että ehto ei määrittele laskutoimitusta.

13. Selitä omin sanoin, miksi edellä esitetty todistus osoittaa, että annettu ehto ei määrittele laskutoimitusta.

14.* Määritteleekö ehto $[a]_5 * [b]_5 = [|a| + |b|]_5$ laskutoimituksen joukossa $\mathbb{Z}_5$?

15. Määritteleekö ehto $[a]_n * [b]_n = [3a + b]_n$ laskutoimituksen joukossa $\mathbb{Z}_n$?

    Neuvo: Katso mallia lauseen 8.3 todistuksesta.

Tehtävä VII

Valitse seuraavista tehtävistä toinen. Voit toki tehdä molemmat tehtävät, mutta vain yhden tekemisestä saa lisäpisteen.

16. Olkoon G ryhmä, jolla on aliryhmä H. Tarkastellaan vasempien sivuluokkien joukkoa G/H. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

    a) Aliryhmä H on yksi sivuluokista.

    b) Jokainen sivuluokka on ryhmän G aliryhmä.

    c) Jos G on äärellinen, sivuluokkien lukumäärä jakaa kertaluvun $|G|$.

17. Olkoon G ryhmä, jolla on aliryhmä H. Merkitään $k = [G : H]$ ja oletetaan, että k on äärellinen. Olkoon $g \in G$. Osoita, että $g^m \in H$ jollakin $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$.