Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2012
Harjoitus 5

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 17.2.2012 klo 18.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 16.3.2012 klo 18.00

Näissä laskuharjoituksissa käsiteltäviä asioita ovat

- Virittäminen
- Jäännösluokat ja jäännösluokkaryhmä

Jos käsiteltävän ryhmän laskutoimitusta ei ole erikseen mainittu, valitaan mahdollisista laskutoimituksista se, joka on luonnollinen ja tekee rakenteesta ryhmän. Jos esimerkiksi puhutaan ryhmästä $\mathbb{Z}$, tarkoitetaan ryhmää $(\mathbb{Z}, +)$.

Tehtävä I

Lue kirjasta luvut 6.1 ja 6.2, joissa käsitellään aliryhmien virittämistä ja syklisiä aliryhmiä.

1. Mitkä seuraavista alkoista ovat ryhmän $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ aliryhmässä $\langle 3 \rangle$?

$$27, \quad \frac{1}{3}, \quad -3$$

Määritä seuraavat aliryhmät.

2. ryhmän $\mathbb{Z}$ aliryhmät $\langle 5 \rangle$ ja $\langle -5 \rangle$
3. ryhmän K_{20} aliryhmät $\langle 5 \rangle$ ja $\langle 4 \rangle$
4.* ryhmän S_5 aliryhmä $\langle (1523) \rangle$

Mitkä seuraavista aliryhmistä ovat syklisiä?

5. ryhmän K_{16} aliryhmä $\{4, 8, 12, 16\}$
6. ryhmän S_5 aliryhmä $\{(1), (25), (34), (25)(34)\}$

Tehtävä II

7. Määritä seuraavien alkioiden kertaluvut.

   a) ryhmän S_6 alkio $(153)(246)$

   b) ryhmän $\mathbb{Q}^*$ alkio -4

   c) ryhmän K_{12} alkio 6

   d) ryhmän K_{10} alkio 6

8. Mikä on ryhmän $K_8 \times S_3$ alkion $a = (2, (13))$ kertaluku? Mitkä ovat aliryhmän $\langle a \rangle$ alkiot?

9. Olkoon G ryhmä ja g sen alkio. Oletetaan, että $o(g) = 6$. Mitkä ovat alkioiden g^2, g^3, g^4 ja g^5 kertaluvut?

Tehtävä III

Olkoon G ryhmä ja g sen alkio.

10. Osoita, että $\langle g^2 \rangle \subset \langle g \rangle$.

    Neuvo: Palauta mieleen, miten joukko osoitetaan toisen osajoukoksi. Jos käytät lausetta 6.2, pitäisi todistuksen alkaa sanoilla ”Oletetaan, että $a \in \langle g^2 \rangle$.” Jos puolestaan käytät lauseen sijasta määritelmää, tulee todistuksesta erilainen.

11.* Osoita, että $\langle g \rangle = \langle g^{-1} \rangle$.

    Neuvo: Muista, että joukot osoitetaan samoiksi näyttämällä, että kumpikin on toisen osajoukko.

12.* Muotoile omin sanoin tehtävässä 11 osoitettu tulos. Tee se ilman matemaattisia symboleita.

Tehtävä IV

Opiskele kirjan luku 7.1, jossa käsitellään jaollisuutta, sekä luku 7.5, jossa käsitellään kongruesseja ja jäännösluokkia. Jäännösluokkien laskutoimitusta käsitellään luvussa 8.1.

13. Päteekö $8 \equiv 50 \pmod 6$?

14. Mitkä luvuista 3, 11, 25, 174 ja 282 ovat kongruentteja modulo 4?

15. Tutki seuraavissa kohdissa, ovatko annetut jäännösluokat samat.

a) $[17]_5$ ja $[21]_5$
b) $[67]_{11}$ ja $[25]_{11}$
c) $[31]_7$ ja $[53]_7$

16. Määritä seuraavat summat ja monikerrat:

$$[3]_5 + [4]_5, \quad [3]_6 + [4]_6, \quad [2]_3 + [2]_3 + [2]_3, \quad 7 \cdot [3]_4.$$

17.* Jäännösluokkien joukko $\mathbb{Z}_n$ on ryhmä, kun laskutomituksena on jäännösluokkien yhteenlasku. Määritä ryhmän $(\mathbb{Z}_9, +)$ aliryhmä $\langle [3]_9 \rangle$.

Tehtävä V

18. Selitä lyhyesti omin sanoin, miksi isomorfismi määritellään niin kuin määritellään.

19. Karteesinen tulo $\mathbb{Z} \times \{0\}$ on ryhmä, kun laskutoimituksena on komponenteittainen yhteenlasku. Osoita, että $\mathbb{Z} \times \{0\}$ on isomorfinen ryhmän $\mathbb{Z}$ kanssa.

Tehtävä VI

Valitse seuraavista tehtävistä toinen. Ensimmäinen tehtävistä kertaa ydinasioita ja toinen on hieman haastavampi tehtävä. Voit toki tehdä molemmat tehtävät, mutta vain toisen tekemisestä saa lisäpisteen.

20. Osoita, että ryhmä $(\mathbb{Z}_n, +)$ on vaihdannainen.

21. Osoita, että ryhmät $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ja $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ eivät ole isomorfiset.

    Tämän tehtävän aikaisemmassa versiossa piti osoittaa, että ryhmät $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ ja $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ eivät ole isomorfiset. Tämä osoittautuikin tietyllä tapaa helpommaksi kuin oli tarkoitus. Voit tehdä, minkä version haluat, mutta älä enää luota tehtävän laatijan arvioihin siitä, mikä on vaikeaa ja mikä ei.