

Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2012
Harjoitus 12

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ke 25.4.2012 klo 18.00

Tällä viikolla ei ole lainkaan tähtitehtäviä, ja lisäpisteitä laskettaessa tähtitehtäväkerroin on 1. Jotta voit saada tehtävästä pisteitä, on yrityksen oltava rehellinen.

Näissä laskuharjoituksissa käsiteltäviä uusia aiheita ovat

- Ryhmien homomorfialause
- Polynomien jaollisuus

Tehtävä I

1. Harjoituksen 11 tehtävässä 4 osoitettiin, että neliön symmetriaryhmällä D_4 on normaali aliryhmä $R_2 = \{1, \rho_2\}$. Ryhmän D_4 kertotaulu on esitetty alla. Määritä tekijäryhmän D_4/R_2 kertotaulu.

\cdot	1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
1	1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	1	σ_4	σ_1	σ_2	σ_3
ρ_2	ρ_2	ρ_3	1	ρ_1	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2
ρ_3	ρ_3	1	ρ_1	ρ_2	σ_2	σ_3	σ_4	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	1	ρ_1	ρ_2	ρ_3
σ_2	σ_2	σ_3	σ_4	σ_1	ρ_3	1	ρ_1	ρ_2
σ_3	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2	ρ_2	ρ_3	1	ρ_1
σ_4	σ_4	σ_1	σ_2	σ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_3	1

2. Onko tekijäryhmä D_4/R_2 syklinen?

Tehtävä II

Tutustu kirjan lukuun 20, jossa käsitellään ryhmien homomorfialausetta.

Tutkitaan kuvausta $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{15}$, $f(a) = [3a]_{15}$.

3. Osoita, että f on ryhmähomomorfismi.

4. Mikä on homomorfismin f ydin? Perustele vastauksesi huolellisesti.
5. Mikä on homomorfismin f kuva?
6. Maalijoukolla on aliryhmä

$$H = \{[0]_{15}, [3]_{15}, [6]_{15}, [9]_{15}, [12]_{15}\}.$$

Osoita, että ryhmien homomorfialauseen avulla, että ryhmä $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ on isomorfinen ryhmän H kanssa.

7. Mille alkiolle edellisen tehtävän isomorfismi kuvaa sivuluokan $2 + 5\mathbb{Z}$? Entä sivuluokan $-11 + 5\mathbb{Z}$?

Tehtävä III

8. Millainen isomorfismi homomorfismista $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(a, b) = b$ saadaan ryhmien homomorfialauseen avulla?

Tehtävä IV

9. Olkoon $f: G \rightarrow H$ ryhmähomomorfismi. Osoita, että niillä ryhmän G alkiolla, jotka ovat samassa sivuluokassa ytimen $\text{Ker } f$ suhteen, on sama kuva-alkio.
10. Määritä kaikki homomorfismit ryhmältä \mathbb{Z}_4 ryhmälle S_3 .

Tehtävä V

Tutustu kirjan lukuun 22, jossa käsitellään polynomien jaollisuutta.

11. Etsi seuraavien polynomien juuret:

$$X^2 - X + 1 \in \mathbb{Q}[X], \quad X^2 - X + 1 \in \mathbb{Z}_7[X], \quad X^4 + 2X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[X].$$

12. Mitkä edellisen tehtävän polynomeista ovat jaottomia ja mitkä eivät?
13. Onko renkaan $\mathbb{Z}_3[X]$ polynomi $X^3 + 2X + 2$ jaoton?

Tehtävä VI

Valitse seuraavista tehtävistä yksi. Voit toki tehdä kaikki tehtävät, mutta vain yhdestä saat lisäpisteen.

14. Osoita, että kuvaus $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $f(n) = n/4 + \mathbb{Z}$ on ryhmähomomorfismi. Millainen isomorfismi kuvauksesta saadaan ryhmien homomorfialauseen avulla?
15. Osoita ryhmien homomorfialauseen avulla, että tekijäryhmä $6\mathbb{Z}/42\mathbb{Z}$ on isomorfinen ryhmän \mathbb{Z}_7 kanssa.
16. Olkoot G ja G' ryhmiä, joilla on normaalit aliryhmät N ja N' . Osoita, että ryhmät $(G \times G')/(N \times N')$ ja $G/N \times G'/N'$ ovat isomorfiset.