

**Autonomiset systeemit**  
Harjoitus 9, syksy 2010

1. Todista lause 3.4.

Ohje. Määritelmä 2.2, siinä  $t_0 = 0$ , eikä tarvitse välittää  $t_1$ :stä, sillä kyse on autonomisesta systeemistä (aikatranslaatio). Arvio (2.5) lienee helppo, mutta stabiilisuuden osoittaminen on vaikeampaa - ja (2.5) yksin ei riitä. Siinä tarvitaan lausetta 1.3.

2. Olkoon  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  ja  $V(x)$  systeemin (1.1) vahva Lyapunovin funktio alueessa  $\Omega \ni \mathbf{0}$ . Osoita että  $\Omega$  ei sisällä muita kriittisiä pisteitä kuin  $\mathbf{0}$ :n.

3. Osoita autonomisen parin

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + x^3 \\ \dot{y} &= -x + y^3\end{aligned}$$

tasapainotila  $\mathbf{0}$  epästabiiliksi.

Ohje. Yksinkertainen, mutta ehkä hieman yllättävä yrite.

4. Van der Pol'in yhtälö johtaa 1. kl. pariin

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + e(y - x^2y),\end{aligned}$$

jossa  $e \in \mathbf{R}$  on parametri. Parilla on tasapainotila  $\mathbf{0}$ . Oletetaan että  $e < 0$ .

(a) Tutkitaan funktiota  $V(x, y) = x^2 + y^2$ . Missä alueessa  $\Omega$  se on heikko Lyapunovin funktio kyseiselle systeemille?

(b) Määrää  $N = \{(x, y) \in \Omega \mid \dot{V}(x, y) = 0\}$ .

(c) Osoita  $\mathbf{0}$  asympotoottisesti stabiiliksi. Mitä voit sanoa alueesta  $\Psi$ ? Tässä asiassa ei odoteta mitään tyhjentävää vastausta.