

Autonomiset systeemit
Harjoitus 7, syksy 2010

1. Todista lemma 3.1.

Ohje. Joukko $K = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \epsilon \leq \|x\| \leq r\}$ on kompakti.

2. Tutkitaan autonomisen systeemin

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{2}yz \\ \dot{y} &= -xz \\ \dot{z} &= 2xy\end{aligned}$$

tasapainotilaa $\mathbf{0}$. Osoita se stabiiliksi muodostamalla siihen liittyvä heikko Lyapunovin funktio. Voiko samaisessa tarkoituksessa soveltaa myös luvun *ii* lauseita?

Ohje. Kokeile parametrillista neliömuotoa.

3. Jatkoa edelliselle tehtävälle. Osoita, että $\mathbf{0}$ ei ole asympotoottisesti stabiili.

Ohje. Seuraa nopeasti eräästä huomiosta.

4. Osoita Liénardin yhtälön ja parin (3.9) yhtäpitävyys.

Ohje. Sijoitus ei ole se aivan tavallinen.

5. Tutkitaan autonomisen parin

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + \sin y \\ \dot{y} &= -2x - 3y\end{aligned}$$

tasapainotilaa $\mathbf{0}$. Osoita se asympotoottisesti stabiiliksi muodostamalla siihen liittyvä vahva Lyapunovin funktio. Voiko myös luvun *ii* lauseita soveltaa?

Ohje. Yksinkertainen yrite. Funktiot y ja $\sin y$ ovat samanmerkkiset, ja lisäksi pätee $|\sin y| \leq |y|$.