

Autonomiset systeemit
Harjoitus 4, syksy 2010

1. Edelleen lauseen 1.4 todistus: Osoita tarkemmin, että joukot $\omega(x)$ ja $cl_D(\gamma^+(x))$ ovat positiivisesti invariantteja.

2. Onko lineaarinen 3×3 -homogeenisysteemi

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

stabiili, asymptoottisesti stabiili vai epästabiili?

3. Osoita, että lineaarinen pari

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 x - ky + f(t), \end{aligned}$$

jossa $\omega, k > 0$ ovat vakiota ja funktio $f(t)$ on jatkuva, on asymptoottisesti stabiili.

4. Ratkaise (epälineaarinen) systeemi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

ja osoita että vakioratkaisu $\mathbf{0}$ on stabiili, mutta yksikään muu ratkaisu ei ole.

Ohje. Voit lähteä liikkeelle muotoa $x = r \cos at$, $y = r \sin at$ olevasta yritteestä. Miksi tämä muoto loppujen lopuksi riittää?