

Autonomiset systeemit
Harjoitus 12, syksy 2010

1. Autonomisen parin

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y - xy \\ \dot{y} &= -x - y + xy\end{aligned}$$

(ainoa) kriittinen piste $\mathbf{0}$ osoitettiin harjoituksen 11 tehtävässä 1 asymptoottisesti stabiiliksi. Muodosta jokin siihen liittyvä vahva Lyapunovin funktio. Mitä tämä kertoo asymptoottisen stabiilisuuden alueesta?

Ohje. Yhtälö (4.5).

2. Osoita autonomisen parin

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - x\sqrt{1+x^2+y^2} \\ \dot{y} &= -y\sqrt{1+x^2+y^2}\end{aligned}$$

tasapainotila $\mathbf{0}$ asymptoottisesti stabiiliksi ja tutki asymptoottisen stabiilisuuden aluetta.

3. Luennoilla on esimerkkinä tarkasteltu paria

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x^3 - (4x^2 + y^2 - 4)y.\end{aligned}$$

Sen ainoa kriittinen piste on $\mathbf{0}$, ja tälle löydettiin Lyapunovin funktio-antifunktio $V(x, y) = x^4/4 + y^2/2$. Arvoilla $4x^4 + y^2 \leq 4$ pätee $\dot{V}(x, y) \geq 0$, arvoilla $4x^2 + y^2 \geq 4$ vuorostaan $\dot{V}(x, y) \leq 0$ ja $N = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \dot{V}(x, y) = 0\} = E \cup \{(x, 0) \mid x \in \mathbf{R}\}$, jossa E on ellipsi $E = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 = 4\}$.

Olkoot vakiot $c_1 > c_2 > 0$ sellaiset, että ellipsi E sisältyy kompaktin renkaan $K = \bar{E}_{c_1} \setminus E_{c_2}$ sisukseen. Monesti käytetyllä päättelyllä nähdään, että K on positiivisesti invariantti joukko. Olkoon $z = (x, y) \in K$. Koska ainoa kriittinen piste $\mathbf{0}$ ei kuulu joukkoon K , niin Poincarén-Bendixsonin lauseen mukaan rajajoukko $\omega(z) \subset K$ on periodinen rata.

(a) Osoita että $\omega(z) \not\subset E$.

(b) Osoita että $\omega(z) \not\subset N$.

(c) Kuinka selität kohdan b, kun muistetaan mitä on useasti puhuttu rajajoukon suhtautumisesta joukkoon N (lause 3.6 ja sen muunnemat harjoituksissa)?

Ohje kohtiin a ja b: $w \in \omega(z)$, jolloin $t \cdot w = (x(t), y(t)) \in \omega(z)$. a: Implisiittinen derivointi.