

Autonomiset systeemit
Harjoitus 11, syksy 2010

1. Etsi parin

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y - xy \\ \dot{y} &= -x - y + xy\end{aligned}$$

kriittiset pisteet ja tutki niiden stabiilisuuden laatua.

2. Formuloi lauseiden 3.6 ja 3.7 esimerkkiä seuraten lauseesta 3.2 versio, jossa $U(x)$ on vain heikko Lyapunovin antifunktio, ts. derivaatta $\dot{U}(x)$ on positiivisesti vain semidefiniitti, mutta $\mathbf{0}$ on kuitenkin epästabiili. Lausetta ei tarvitse todistaa. Ohje. Ota mallia harjoituksen 10 tehtävästä 1.

3. Analysoi van der Polin yhtälöön liittyvän parin

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + e(1 - x^2)y\end{aligned}$$

tasapainotilan $\mathbf{0}$ stabiilisuus, kun

(a) $e = 0$, (b) $e = 2$.

Ohje kohtaan b. Sovella tehtävän 2 lausetta.

4. Tarkastellaan paria

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^3(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= y(1 - x^2 - y^2).\end{aligned}$$

(a) Osoita sen tasapainotila $\mathbf{0}$ epästabiiliksi.

Olkoon piste $z = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ kiinnitetty. Mitä voit sanoa siitä alkavan radan rajajoukosta $\omega(z)$, kun

(b) $0 < \|z\| < 1$, (c) $\|z\| > 1$?

Ohje. Lause 3.6 ja sen ”antivastine”, soveltaen. Tarkemmin, etsi funktio joka toimii jossain Lyapunovin antifunktiona, toisaalla Lyapunovin funktiona.