Autonomiset systeemit
Harjoitus 10, syksy 2010

1. Formuloi lauseen 3.7 esimerkkiä seuraten lauseesta 3.1 versio, jossa $V(x)$ on vain heikko Lyapunovin funktio, mutta $\mathbf{0}$ on kuitenkin asymptoottisesti stabiili. Lausetta ei tarvitse todistaa.

2. Aikaisemmin (harj. 7 teht. 5) on osoitettu parin

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + \sin y\\ \dot{y} &= -2x - 3y\end{aligned}$$

tasapainotila $\mathbf{0}$ asymptoottisesti stabiiliksi. Määrää nyt asymptoottisen stabiilisuuden alue Ψ.

Taustaa: Liénardin yhtälö $\ddot{u} + f(u)\dot{u} + g(u) = 0$ on yhtäpitävä 1. kl. parin

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -g(x) - f(x)y\end{aligned}$$

kanssa. Oletetaan, että jossain nollan ympäristössä pätee (f ja g säännöllisiä)
(1) $f(x) \geq 0$ ja (2) $xg(x) > 0$, paitsi $g(0) = 0$.
Origo on siis tasapainotila, ja - kuten luennolla on esitetty (kertaa kyseinen esimerkki) - jossain origon ympäristössä heikkona Lyapunovin funktiona toimii

$$V(x, y) = G(x) + y^2/2, \quad \text{jossa } G(x) = \int_0^x g(s)\,ds.$$

Sovelletaan sanottua seuraaviin pareihin, joissa
(a) osoita origo asympt. stabiiliksi, (b) arvioi asympt. stabiilisuuden aluetta Ψ.

3.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -x^3 - x^2 y\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -x - x^2 - y\end{aligned}$$

Ohje. Joukon $\bar{E}_c \subset \Omega$ kompaktisuus! Sen saavuttamiseksi kannattaa rajoittaa joukkoa Ω. Hahmottele funktion G kulku. Muita kriittisiä pisteitä?