

Autonomiset systeemit
Harjoitus 1, syksy 2010

1. (a) Kirjoita kertaluvun n skalaariyhtälö

$$u^{(n)} = f(t, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) \quad (*)$$

yhtäpitävänä ensimmäisen kertaluvun systeeminä.

- (b) Siirtyykö yhtälöstä (*) lineaarisuus systeemiin? Entä autonomisuus eli eksplisiittinen riippumattomuus vapaasta muuttujasta t ?

2. Olkoon kuvaus $f = (f_1, \dots, f_n) : D \rightarrow \mathbf{R}^n$ jatkuvasti derivoituva alueessa $D \subset \mathbf{R}^n$. Osoita, että se on lokaalisti Lipschitz D :ssä.

Ohje. Väliarvolause sovellettuna komponentteihin f_k .

3. Olkoon $f : D \rightarrow \mathbf{R}^n$ lokaalisti Lipschitz alueessa $D \subset \mathbf{R}^n$. Olkoon $x_0 \in D$, $r > 0$ ja $\bar{B}(x_0, r) \subset D$ suljettu kuula. Osoita, että f on Lipschitz tässä.

4. Todista lauseen 1.1 todistuksessa esiintyvä epäyhtälö (1.9).

Ohje. Muista että $t \cdot x = x(t)$ on systeemin (1.1) ratkaisu, jolla $x(0) = x$.