FÖRBEREDELSE INFÖR FÖRSTA KURSFÖRHÖRET

Detta är övningsmaterial inför det första kursförhöret. Provområdet är alltså grovt taget kursens början - användning av definitionen av funktioners gränsvärde. Denna samling uppgifter är avsedd att ge en tydligare bild av de viktigaste sakerna.

Det lönar sig även att repetera hem- och handledningsuppgifterna.

(1) Skriv ner definitionen av en talföljds definition. Förklara med egna ord (och bild).

(2) Vi antar att $a < b$ och $0 \leq x \leq 1$. Visa att $a \leq ax + b(1-x) \leq b$.

(3) Visa att $x^3 < x$ alltid när $0 < x < 1$.

(4) Visa att $x^2 < y^2$ alltid när $0 < x < y$.

(5) Vi antar att $9 < x < 9 + 5^{-999}$. Visa att $\sqrt{x} - 3 < 5^{-1000}$.

(6) Vilka tal uppfyller olikheterna $|x+1| < 2$ och $|x-2| < 3$?

(7) Vilka tal uppfyller ekvationen $|3x-2| < 1$?

(8) Vi antar att $|x-e| < 10^{-1000}$ och $|y-\pi| < 10^{-1000}$. Visa att $|xy - e\pi| < 10^{-999}$.

(9) Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet av en talföljd att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+3} = 3.$$

(10) Visa med hjälp av definitionen av gränsvärdet av en talföljd att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+3} = 2$$

inte stämmer.

(11) Vi antar att talföljden x_n uppfyller vilkoren $|x_n - a| < 1$ för alla n. Visa att det existerar ett tal M, för vilket $-M < x_n < M$ gäller för n.

(12) Vi antar att följderna (x_n) och (y_n) konvergerar. Definiera $z_n = \max(x_n, y_n)$. Visa att följden (z_n) konvergerar.

(13) Utred gränsvärdet för talföljden x_n när

$$\frac{6+n^3}{(n+1)(n^2-2)}$$

med hjälp av lämpliga satser i kursen.

(14) Vi antar att talföljderna (x_n) och (y_n) har följande egenskaper: för alla n gäller $|x_n| < 2$ och $y_n \to 0$ när $x_n \to \infty$. Visa att följden $(x_n y_n)$ konvergerar.

(15) Vi antar att $x_1 > 0$ och $x_{n+1}/x_n = 1 + 1/n$ för alla n. Visa att följden (x_n) divergerar. Tips: skriv den högra sidan av ekvationen ovan som ett bråktal.

(16) Vi antar att talföljden (x_n) är definierad med villkoren $x_1 = 1$ och $x_{n+1}/x_n = 1 + 1/3n^2$. Visa att följden konvergerar. Du kan till exempel framskirda enligt följande:

(1) Visa att följden är strängt växande.
(2) Visa att $x_n \leq 2 - 1/n$ för varje n.
(3) Gör slutsatser.

(17) Vi antar att $x_n \geq 0$ för alla n och att
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$
Visa att
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

(18) Vi antar att
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$
Visa att
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{a}.$$

(19) Vi antar att följden (x_n) är avtagande, följden (y_n) växande och att $|x_n - y_n| \to 0$ när $n \to \infty$. Visa att vi för varje n har att $y_n \leq x_n$. Vad kan du säga angående följdernas konvergens eller divergens?

(20) Vi antar att $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$ när $n \to \infty$. Hur går det med uttrycket $(1 + \frac{1}{3n})^n$?

(21) Visa att
$$\frac{n^2+1}{n+1} \to \infty,$$
när $n \to \infty$.

(22) Visa att
$$\frac{n}{3^{2n}} \to 0,$$
när $n \to \infty$.

(23) Vi antar att $A =]1,2[\cup]3,4[$. (Beteckningen betyder unionen av två mängder: de punkter som hör till åtminstone en av mängderna.) Vad är $\sup A$? Vad är $\inf A$?

(24) Vi antar att $A = \{1 - 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Vad är $\sup A$ och $\inf A$? Varför existerar de?

(25) Vi antar att A och B är icke-tomma uppifrån begränsade talmänger och att $a = \sup A$ och $b = \sup B$. Visa att $\sup\{x+y \mid x \in A, y \in B\} = a+b$.

(26) (Fortsättning från föregående.) Vi antar vidare att talen i A och B positiva. Visa att $\sup\{xy \mid x \in A, y \in B\} = ab$.

(27) Utred med hjälp av definitionen av gränsvärde
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}.$$
Varför kan du anta att $x \neq 2$?

(28) Utred $\lim_{x\to 3} x^2$ och motivera ditt svar med hjälp av definitionen av gränsvärde.

(29) Visa med hjälp av definitionen av gränsvärde att

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+1}{x-1} = 2.$$