PURTAVAA TOISTA KURSSIKOETTA VARTEN

Tässä harjoittelumateriaalia toista kurssikoetta varten. Koealue on kurssin jälkipuolisko funktion raja-arvosta kurssin loppuun. Tämä tehtäväsarja yrittää tarjota tarkempaa kuvaa tärkeistä taidoista.

1. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{x\to 3} x^3 = 27.$$

2. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{4}{7}$$

on tosi.

3. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että väite

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{5}{6}$$

on epätosi.

4. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}.$$

Tulkitse tulos derivaattana.

5. Osoita funktion raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmän perusteella, että funktio f jolle kaikilla x pätee $f(x) = x^2 - 3x$, on jatkuva kohdassa $x = 2$.

6. Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmän perusteella, että funktio f jolle kaikilla x pätee $f(x) = x^2 - 3x$, on derivoituva kohdassa $x = 2$.

7. Oletetaan, että $|f(x)| \leq 2$ kaikilla $x \in]-1, 1[$. Määritellään funktio $g :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ ehdolla $g(x) = xf(x)$. Osoita, että g on jatkuva kohdassa $x = 0$.

8. Oletetaan, että $|f(x)| \leq 2$ kaikilla $x \in]-1, 1[$. Määritellään funktio $g :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ ehdolla $g(x) = x^2 f(x)$. Osoita, että g on derivoituva kohdassa $x = 0$.

9. Selvitä kurssin lauseiden perusteella

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x^3 + x^2 + 3x}{3x^2 + 2x + 1}.$$

10. Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että funktio $f :]0,3[\to \mathbb{R}$, jolle pätee kaikilla $x \in]0,3[$, että

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

on derivoituva kohdassa $x = 2$ ja että $f'(2) = -2$.

11. Oletetaan, että $\lim_{x\to 4} f(x) = 7$. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että $\lim_{x\to 2} f(x^2) = 7$.

12. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2}{x^2+1} = 1.$$

13. Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to 7-} \frac{x+7}{x-7} = -\infty.$$

14. Oletetan, että $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 2$. Osoita, että on olemassa sellainen $h > 0$, että kaikilla x pätee: jos $0 < x < h$, niin $(2 - \frac{1}{10^{100}})x < f(x) < (2 + \frac{1}{10^{100}})x$. Kannattaa piirtää kuva!

15. Osoita Bolzanon lauseen avulla, että yhtälöllä $e^x = \sin x$ on ainakin yksi ratkaisu. Huolellinen perustelu!

16. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sin(x^7)}{x^2+1}.$$

Osoita, että niiden arvojen joukossa, joita f saa, on suurin. Vihje: etsi ensin kohta, jossa f saa positiivisen arvon.

17. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sin(x^7)}{x^2+1}.$$

Osoita, että niiden arvojen joukossa, joita f saa, on pienin.

18. Määritellään $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yhtälöllä $f(x) = x^2|x|$. Millä x on olemassa derivaatta $f'(x)$? Entä toinen derivaatta $f''(x)$? Entä kolmas derivaatta $f'''(x)$?

19. Derivoi $\sqrt{\ln(x^2+3)}$.

20. Tarkastellaan funktiota $f : [0,2] \to [1,5]$, jolle pätee $f(x) = x^2 + 1$ kaikilla $x \in [0,2]$. Osoita, että sillä on aidosti kasvava (jatkuva) ja derivoituva käänteisfunktio $g :]1,5[\to]0,2[$. Määritä $g'(2)$.

21. Tarkastellaan funktiota $f :]0, 7[\to \mathbb{R}$, jolle pätee $f'(1) = 2$ ja $f'(3) = 5$. Osoita, että välillä $]1, 3[$ on luku a, jolle $f'(a) = 4$. Kannattaa tutkia yhtälöllä $g(x) = f(x) - 4x$ määriteltyä funktiota.

22. Osoita tarkasti, ettei funktio f ole derivoituva kohdassa $x = 0$, jos $f(0) = 0$ ja $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ kun $x \neq 0$.

23. Oletetaan, että $f'(1) = 2$. Selvitä raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}.$$

24. Miten yhtälöstä $(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$ voidaan karakterisointilauseen avulla päätellä funktion $f(x) = x^4$ derivaatta?

25. Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[1, 3]$ ja derivoituva välillä $]1, 3[$. Oletetaan lisäksi, että kaikilla $x \in]1, 3[$ pätee $0 \leq f'(x) \leq 1$. Mitä tiedetään arvosta $f(3)$, jos $f(1) = 5$?

26. Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[1, 3]$ ja derivoituva välillä $]1, 3[$. Oletetaan lisäksi, että kaikilla $x \in]1, 3[$ pätee $0 \leq f'(x) \leq 1$. Mitä tiedetään arvosta $f(1)$, jos $f(3) = 5$?

27. Oletetaan, että funktio $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva välillä $[0, 1]$ ja derivoituva välillä $]0, 1[$. Oletetaan, että $f(0) = 7$ ja että kaikilla $x \in]0, 1[$ pätee $x < f'(x) < 1$. Mitä tiedetään tämän perusteella arvosta $f(1)$? Vihje: apufunktiosta $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ on iloa.

28. Osoita väliarvolauseen avulla, että kaikilla x pätee $|\cos x - 1| \leq |x|$. (Kannattaa muistaa, että $\cos 0 = 1$.)

29. Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja derivoituva. Oletetaan lisäksi, että kaikilla x pätee, että $|f'(x)| < 7$. Anna esimerkki sellaisesta luvusta $\delta > 0$, että kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ pätee: jos $|x - y| < \delta$, niin $|f(x) - f(y)| < 7^{-100}$.

30. Tutki funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mahdollisia suurimpia ja pienimpiä arvoja sekä lokaaleja ääriarvoja, kun

$$f(x) = \sqrt[7]{\frac{x^4}{x^8 + 1}}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Vihje: kannattaa huomata, että voi tarkastella juuren alusta ja merkitä $t = x^2$. Perustele ratkaisusi!

31. Oletetaan, että $h > 0$ ja että funktio $f :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ jatkuva välillä $]x_0 - h, x_0 + h[$ ja derivoituva väleillä $]x_0 - h, x_0[$ ja $]x_0, x_0 + h[$. Oletetaan, lisäksi, että $\lim_{x \to x_0-} f'(x) = \lim_{x \to x_0+} f'(x) = A \in \mathbb{R}$. Osoita, että f on derivoituva kohdassa x_0 ja että $f'(x_0) = A$. Vihje: sovella väliarvolausetta erotusosamäärään.

32. Oletetaan, että $h > 0$ ja että funktio $f :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ derivoituva välillä $]x_0 - h, x_0 + h[$. Oletetaan, lisäksi, että $|f'(x)| \leq 7$ kun $x_0 - h < x < x_0$ tai $x_0 < x < x_0 + h$. Osoita, että $|f'(x_0)| \leq 7$.

33. Oletetaan, että $h > 0$ ja että funktio $f :]x_0 - h, x_0 + h[\to \mathbb{R}$ jatkuva ja derivoituva välillä
$]x_0 - h, x_0 + h[$ Oletetaan, lisäksi, että $\lim_{x \to x_0-} f'(x) = A$ ja $\lim_{x \to x_0+} f'(x) = B$. Osoita, että $f'(x_0) = A = B$.

34. Osoita, että kaikilla $x \geq 0$ pätee $\ln(x + 1) \leq x$.

35. Osoita, että kaikilla $x \geq 0$ pätee $\ln(x + 1) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

36. Osaatko verrata edellisten tehtävien tapaan arvoja $\ln(x+1)$ ja $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$, kun $x \geq 0$? Keksitkö jatkoa?

37. Osoita, että kaikilla $x \geq 0$ pätee $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. (Neljäs derivaatta on avuksi.)

38. Tarkastellaan yhtälöllä $f(x) = x^x$ joukossa $]0, 2[$ määriteltyä funktiota. Selvitä sen lokaalit ääriarvot. Huolelliset perustelut!

39. Tarkastellaan funktiota $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ missä $f(x) = e^{-2x} \sin(\sqrt{3}x)$. Selvitä sen lokaalit ääriarvot. Mitä tapahtuu funktiolle kun $x \to \infty$?