Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Geometria
Erilliskoe 26.1.2012

Teht. 1. Todista Eukleideen Elementan Lause I.12: Normaalin konstruointi suoralle suoran ulkopuolisen pisteen kautta.

Ohje: Tehtävän ratkaisemiseen saa käyttää Eukleideen postulaatteja P1–P4 ja Elementan lauseita I.1–I.11.

Teht. 2. Tarkastellaan Hilbertin aksioomeja.

(a) Osoita aksioomeista lähtien, että on olemassa kolme eri suoraa, jotka eivät leikkaa toisiaan samassa pisteessä.

(b) Olkoon $A * B * C$ ja $A * C * D$. Osoita aksioomeista lähtien, että A, B, C ja D ovat eri pisteitä samalla suoralla.

Teht. 3. Tarkastellaan hyperbolista geometriaa. Olkoon $\triangle ABC$ tasasivuinen kolmio ja $D \in AB \setminus \{A, B\}$ sekä $E \in AC \setminus \{A, C\}$ kaksi pistettä kolmion sivuilla niin, että $AD = AE$. Osoita, että kolmio $\triangle ADE$ ei ole tasasivuinen. Päteekö $DE < AD$ vai $DE > AD$?

Teht. 4. Olkoon piste X kolmion $\triangle ABC$ sisällä ja leikatkoot suorat AX, BX ja CX kärkien A, B ja C vastaiset kolmion sivut pisteissä P, Q ja R. Oletetaan, että suorat QR ja BC leikkaavat pisteessä T. Osoita, että

$$\frac{\overrightarrow{BT}}{\overrightarrow{TC}} = -\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}},$$

kun kahden yhdensuuntaisen vektorin $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ suhde $\dfrac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on luku, jolla $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\mathbf{v}$.

Teht. 5. **(a)** Määritä sen ellipsin yhtälö, jolle lineaarikuvaus

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \left(\tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{4}y, -\tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{4}y\right),$$

kuvaa ympyrän $x^2 + y^2 = 16$.

(b) Mitkä ympyrän säteet säilyttävät suuntansa? Ratkaise tämä kohta etsimällä kuvauksen T positiiviset ominaisarvot ja niihin liittyvät ominaisvektorit.