Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Geometria
Erilliskoe 17.11.2011

Teht. 1. Elementa. Piirrä suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta tämän suoran suuntainen suora.

Ohje. Kyseessä on Elementan lause I.31. Ratkaisussa saa käyttää Eukleideen postulaatteja P1–P4 ja Elementan lauseita I.1–I.28.

Teht. 2. Hilbertin aksioomat. Todista Paschin lause: ”Jos ABC on kolmio ja l suora, joka leikkaa sivua AB pisteiden A ja B välissä olevassa pisteessä, niin suora l leikkaa sivua AC tai sivua BC.”

Ohje: Todistuksessa voit käyttää tietoa, että jokainen suora rajaa täsmälleen kaksi puolitasoa ja että näillä puolitasoilla ei ole yhteisiä pisteitä. Muuten todistuksen tulee pohjautua Hilbertin aksioomeihin.

Teht. 3. Hyperbolinen geometria. Tarkastellaan hyperbolista geometriaa. Olkoon $\triangle ABC$ suorakulmainen tasakylkinen kolmio. Yhdistetään suoran kulman kärki B vastaisen sivun keskipisteeseen D. Osoita, että $|BD| < |AD|$.

Teht. 4. Kartioleikkaukset. (a) Etsi paraabelin $y = 3x^2$ polttopiste ja johtosuora.

(b) Olkoot $P_1 = (x_1, 3x_1^2)$ ja $P_2 = (x_2, 3x_2^2)$ tämän paraabelin kaksi eri pistettä. Määritä paraabelin jänteen P_1P_2 yhtälö. Määritä lukujen x_1 ja x_2 avulla ehto sille, että jänne kulkee paraabelin polttopisteen kautta.

Teht. 5. Affiini geometria. Etsi affiini kuvaus $t\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka vie hyperbelin $xy = 1$ hyperbeliksi $x^2 - 4y^2 = 1$.