Geometrian erilliskoe 26.1.2012: ratkaisut ja arvostelukommentit (kuvat sivulla 3)
Järjestäjä: Jouni Luukkainen (vastaanotot D319 ti 14–15 ja pe 9–10; laskupaja D337 ke 12–14)
Tehtävät ja nämä ratkaisut ovat myös kevään 2011 Geometrian kurssin kotisivulla

Teht. 1. *Todista Eukleideen Elementan Lause I.12: Normaalin konstruointi suoralle suoran ulkopuolisen pisteen kautta.*

Ohje: Tehtävän ratkaisemiseen saa käyttää Eukleideen postulaatteja P1–P4 ja Elementan lauseita I.1–I.11.

Ratk. Olkoon l suora ja P piste, joka ei ole suoralla l. On konstruoitava sellainen suora n pisteen P kautta, joka leikkaa suoran l kohtisuorasti.

Konstruktio *(myös piirtäen).* Valitaan piste Q eri puolelta suoraa l kuin piste P. Piirretään piste P keskipisteenä ympyrä pisteen Q kautta [P3]; tämä ympyrä leikkaa tällöin suoran l kahdessa eri pisteessä A ja B. Piirretään piste A keskipisteenä ympyrä pisteen B kautta ja piste B keskipisteenä ympyrä pisteen A kautta (tai piirretään pisteet A ja B keskipisteinä ympyrät pisteen P kautta). Tällöin näillä kahdella ympyrällä on leikkauspiste P' eri puolella suoraa l kuin piste P. Piirretään suora $n = \overline{PP'}$ [P1, P2].

Osoitetaan nyt, että suora n on vaadittu normaali.

Tod. Nyt $AP = BP$ ja $AP' = BP'$. Olkoon M suorien n ja l leikkauspiste. Piirretään suorat $\overline{AP}$ ja $\overline{BP}$; tällöin suora n on kulman $\angle APB$ puolittaja [I.9], jolloin $\underline{\angle APM = \angle BPM}$. Toisaalta piste M on janan AB keskipiste [I.10], jolloin $\underline{AM = BM}$. Näistä jommankumman ehdon ja ehdon $AP = BP$ lisäksi kolmioilla $\triangle AMP$ ja $\triangle BMP$ on yhteinen vastinsivu MP. Täten nämä kolmiot ovat yhtevät joko Lauseen I.4 (s–k–s) tai Lauseen I.8 (s–s–s) perusteella. Siis $\angle AMP = \angle BMP$. Näin ollen suora $n = \overline{PM}$ leikkaa suoran l kohtisuorasti.

Arvostelusta. Piirrostehtävän ratkaisu harpin ja viivaimen avulla sekä ratkaisun todistaminen vaadituksi olivat kumpikin erikseen 3 pisteen arvoisia. Pisteiden A ja B konstruktio tuotti 1 p paitsi, jos epähuomiossa tai tarkoituksellisesti salli mahdollisuuden $A = B$ valitsemalla pisteen $Q \notin l$ sijasta pisteen $A \in l$. Konstruktion loppuunvienti (kulman- tai jananpuolitus) toi loput 2 p; tämän konstruktion ohittaminen paperin ruutuja käyttäen tai vapaalla kädellä vei siis 2 p. Väitteen $\triangle AMP \cong \triangle BMP$ perustelu yhtälöin $AP = BP$, $\angle PAM = \angle PBM$ (äskeisen seuraus kantakulmalauseen tähden!) ja $PM = PM$ tarkoitti itse asiassa pätemättömän "k–s–s-yhtenevyyslauseen" käyttöä ja sivun PM kulman- tai jananpuolittajuuden ohittamista; sakkoa 2 p.

Teht. 2. *Tarkastellaan Hilbertin aksioomeja.*

(a) *Osoita aksioomeista lähtien, että on olemassa kolme eri suoraa, jotka eivät leikkaa toisiaan samassa pisteessä.*

(b) *Olkoon $A * B * C$ ja $A * C * D$. Osoita aksioomeista lähtien, että A, B, C ja D ovat eri pisteitä samalla suoralla.*

Huom. Piste ja suora ovat määrittelemättömiä perusolioita, ja suoran kulkeminen pisteen kautta on määrittelemätön perusrelaatio, jonka ominaisuudet on annettu aksioomeissa I-1, I-2 ja I-3. Suora voidaan samaistaa niiden pisteiden joukoksi, joiden kautta se kulkee. Pisteille A, B ja C on määrittelemätön perusrelaatio $A * B * C$, joka luetaan, että piste B on pisteiden A ja C välissä. Välissäolon ominaisuudet on annettu aksioomeissa B-1, ..., B-4.

Ratk. (a) Aksiooman I-3 mukaan on olemassa 3 eri pistettä A, B ja C, jotka eivät ole samalla suoralla. Koska $A \neq B$, niin aksiooman I-1 mukaan on olemassa yksikäsitteinen suora l_1 pisteiden A ja B kautta. Samoin on olemassa yksikäsitteinen suora l_2 pisteiden B ja C kautta sekä yksikäsitteinen suora l_3 pisteiden A ja C kautta. Tällöin $l_1 \neq l_2$, sillä muutoin $l_1 = l_2$ olisi suora pisteiden A, B ja C kautta. Samoin $l_2 \neq l_3$ ja $l_1 \neq l_3$. Siis l_1, l_2 ja l_3 ovat 3 eri suoraa.

Suorat l_1 ja l_2 leikkaavat vain pisteessä B, sillä muutoin $l_1 = l_2$ aksiooman I-1 tähden. Samoin suorat l_2 ja l_3 leikkaavat vain pisteessä C ja suorat l_1 ja l_3 leikkaavat vain pisteessä A. Täten suorat l_1, l_2 ja l_3 eivät leikkaa toisiaan samassa pisteessä.

(b) Aksiooman B-1 nojalla A, B ja C ovat eri pisteitä samalla suoralla eli siis erityisesti suoralla $\overline{AC}$, ja A, C ja D ovat eri pisteitä samalla suoralla eli siis erityisesti suoralla $\overline{AC}$. Jos olisi $B = D$, niin ehdosta

$A * B * C$ saataisiin $A * D * C$, mikä olisi ristiriidassa ehdon $A * C * D$ kanssa aksiooman B-3 nojalla. Siis $B \neq D$. Täten A, B, C ja D ovat eri pisteitä samalla suoralla $\overline{AC}$.

Teht. 3. *Tarkastellaan hyperbolista geometriaa. Olkoon $\triangle ABC$ tasasivuinen kolmio ja $D \in AB \setminus \{A, B\}$ sekä $E \in AC \setminus \{A, C\}$ kaksi pistettä kolmion sivuilla niin, että $AD = AE$. Osoita, että kolmio $\triangle ADE$ ei ole tasasivuinen. Päteekö $DE < AD$ vai $DE > AD$?*

Ratk. Myös neutraaligeometriassa pätevän kantakulmalauseen (Elementa I.5) nojalla tasasivuisen kolmion $\triangle ABC$ kulmat ovat keskenään yhtäsuuret — olkoon α niiden suuruus — ja tasakylkisen kolmion $\triangle ADE$ kärjissä D ja E olevat kulmat ovat keskenään yhtäsuuret — olkoon β niiden suuruus. Tällöin nelikulmion $BCED$ kulmies suuruudet ovat α, α, $2R - \beta$ ja $2R - \beta$. Hyperbolisessa geometriassa nelikulmion kulmien summa on $< 4R$, joten

$$2\alpha + 2(2R - \beta) < 4R \qquad \text{eli} \qquad \alpha < \beta.$$

Jo tästä seuraa, että kolmio $\triangle ADE$ ei ole tasasivuinen. Mutta itse asiassa **KESKEN**

Teht. 4. *Olkoon piste X kolmion $\triangle ABC$ sisällä ja leikatkoot suorat AX, BX ja CX kärkien A, B ja C vastaiset kolmion sivut pisteissä P, Q ja R. Oletetaan, että suorat QR ja BC leikkaavat pisteessä T. Osoita, että*

$$\frac{\overrightarrow{BT}}{\overrightarrow{TC}} = -\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}},$$

kun kahden yhdensuuntaisen vektorin $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ suhde $\dfrac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on luku, jolla $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\mathbf{v}$.

Ratk. Cevan ja Menelauksen lauseiden perusteella on vastaavasti

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = 1 \qquad \text{ja} \qquad \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}\frac{\overrightarrow{BT}}{\overrightarrow{TC}}\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = -1.$$

Väite seuraa.

Teht. 5. (a) *Määritä sen ellipsin yhtälö, jolle lineaarikuvaus*

$$T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (\tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{4}y, -\tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{4}y),$$

kuvaa ympyrän $x^2 + y^2 = 16$.

(b) *Mitkä ympyrän säteet säilyttävät suuntansa? Ratkaise tämä kohta etsimällä kuvauksen T positiiviset ominaisarvot ja niihin liittyvät ominaisvektorit.*

Ratk. (a) Kuvauksen T matriisi on $A = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$. Tämän käänteismatriisi on $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$. Siis

$$(u, v) = T(x, y) \iff (x, y) = T^{-1}(u, v) = (\tfrac{3}{2}u + \tfrac{1}{2}v, \tfrac{1}{2}u + \tfrac{3}{2}v).$$

Näin ollen

$$x^2 + y^2 = 16 \iff (\tfrac{3}{2}u + \tfrac{1}{2}v)^2 + (\tfrac{1}{2}u + \tfrac{3}{2}v)^2 = 16 \iff \frac{10}{4}u^2 + \frac{10}{4}v^2 + \frac{12}{4}uv = 16 \iff 5u^2 + 5v^2 + 6uv = 32.$$

Täten kuvaellipsin yhtälö on $\underline{5x^2 + 5y^2 + 6xy = 32}$.

(b) Kuvauksen T ja siis matriisin A ominaisarvot ja -vektorit voitaisiin etsiä tavanomaiseen tapaan; tässä tyydytään toteamaan, että $T(1, 1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1, 1)$ ja $T(1, -1) = (1, -1)$, joten T:n ominaisarvot ovat positiiviset $\frac{1}{2} > 0$ ja $1 > 0$ sekä niihin liittyvät ominaisvektorit vastaavasti $t(1, 1)$ ja $t(1, -1)$ $(t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$. Suuntansa säilyttävät säteet ovat siis ne, jotka päätyvät ympyrän keskipisteestä $(0, 0)$ pisteisiin $\pm(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ tai $\pm(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

Huom. Ortonormaalissa kannassa $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = ((1/\sqrt{2})(1, -1), (1/\sqrt{2})(1, 1))$ kuvauksella T on siis kuvauksen geometrisen luonteen selvittävä lauseke $T(x\mathbf{f}_1 + y\mathbf{f}_2) = x\mathbf{f}_1 + \frac{1}{2}y\mathbf{f}_2 \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.