INSTITUTET FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Diferentialekvationer II
Övning 6, Svarsförslag
28.4.2011
Jeremias Berg

1. Visa att matrisen
$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$$
är inverterbar för varje $t \in \mathbf{R}$, och bestäm den inversa matrisen $Y(t)^{-1}$.

   Lösning: Vi börjar med att visa att den givna matrisen är inverterbar. Detta gör vi genom att studera dess determinant, vi vet från linjäralgebra att en matris är inverterbar $\Leftrightarrow$ dess determinant är inte 0.
$$\det\begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix} = e^{2t} - (-e^{2t}) = 2e^{2t}$$
   Nu eftersom $2e^{2t} \neq 0\ \forall t$ så är matrisen inverterbar $\forall t \in \mathbb{R}$. För att hitta dens invers använder vi en till teknik från linjäralgebran. vi studerar sammansatta matrisen av den och identitetsmatrisen och radreducerar den första:
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & e^{2t} & 1 & 0 \\ -1 & e^{2t} & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & e^{2t} & 1 & 0 \\ 0 & 2e^{2t} & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & e^{2t} & 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & e^{2t} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-2t} \end{array}\right)$$
   Dvs.
$$Y(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix}$$

2. Bestäm den lösning till DE-systemet
$$y_1'(t) = y_2(t)$$
$$y_2'(t) = y_1(t)$$
som satisfierar $(y_1(0), y_2(0)) = (0, 1)$.

   Lösning: En uppgift som ganska långt liknar förra veckans uppgifter. Vi börjar med att skriva systemet i matrisform:
$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Nu kan vi lösa denna precis som förra veckan. Genom att först söka egenvärdena och sedan motsvarande egenvektorer. Vi börjar med egenvärdena. Vi söker alltså λ så att:

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Vi söker nu egenvektorerna:

"$\lambda = 1$"
Vi skall lösa u_1 och u_2 ur:

$$\begin{pmatrix} 0-1 & 1 \\ 1 & 0-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \overline{0} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -u_1 + u_2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2 \\ u_1 - u_2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Men eftersom vi igen bara vill ha en lösning får vi välja $u_2 = 1$ och få att

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

"$\lambda = -1$"
Nu skall vi lösa u_1 och u_2 ur:

$$\begin{pmatrix} 0-(-1) & 1 \\ 1 & 0-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \overline{0} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = -u_2 \\ u_1 + u_2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = -u_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Men eftersom vi igen bara vill ha en lösning får vi välja $u_2 = 1$ och få att

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nu med stöd av satserna i kap 6. kommer alla lösningar till systemet att ha formen:

$$\overline{y}(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t - C_2 e^{-t} \\ C_1 e^t + C_2 e^{-t} \end{pmatrix}$$

Sen har vi ännu I:V:P:n kvar:

$$\overline{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} C_1 - C_2 \\ C_1 + C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$$

Så den sökta lösningen blir:

$$\overline{y}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t - e^{-t} \\ e^t + e^{-t} \end{pmatrix}$$

3. Lös DE-systemet

$$\overline{y}'(t) = A\overline{y}(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tips: matrisen A har $r = 3$ som dubbelt egenvärde. Sök en andra lösningsfunktion $\overline{y}^2(t) = e^{3t}(\overline{v} + t(A - 3I)\overline{v})$, där $\overline{v} \in \mathbf{R}^2$ satisfierar $(A - 3I)^2\overline{v} = \overline{0}$.

Lösning: I denna uppgift får vi egenvärdena "gratis". Vi lämnar alltså räknandet av dessa som övningsuppgift åt dem som ännu är osäkra om metoden och nöjer oss med att konstatera att $\lambda = 3$ är ett dubbelt egenvärde. Vi söker först en lösning på nu redan välbekant sätt.

"$\lambda = 3$"
Vi skall alltså lösa u_1 och u_2 ur:

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -1 \\ 1 & 4-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \overline{0}$$

$$\begin{cases} -u_1 - u_2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = -u_2 \\ u_1 + u_2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = -u_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \overline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Men eftersom vi bara är intresserade av en lösning så kan vi välja $u_2 = 1$ och få egenvektrorn som:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nu för att bilda ett fundamentalsystem så måste vi hitta en till lösning till systemet som är linjärt oberende med den första vi hittade. Vi följer tipset och börjar med att söka en vektor som satisfierar $(A-3I)^2\overline{v}=\overline{0}$:

$$(A-3I)=\begin{pmatrix}2-3 & -1\\ 1 & 4-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$
$$(A-3I)^2=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Nu skall vi alltså hitta en vektor $\overline{v}$ som satisfierar

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}$$

Dessutom så måste $\overline{v}\neq\overline{0}$. Ganska trivialt ser vi att vi kan välja $\overline{v}$ som vad som hellst så länge som det inte är samma som redan hittade egenvektorn $\overline{u}$. Vi väljer alltså:

$$\overline{v}=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

Nu blir alltså andra lösningen till systemet (enligt uppgiftens tips):

$$\begin{aligned}y_2(t)=e^{3t}(\overline{v}+t(A-3I)\overline{v})=e^{3t}\left(\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right)&=\\ e^{3t}\left(\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\ 2\end{pmatrix}\right)&=\\ e^{3t}\begin{pmatrix}1-2t\\ 1+2t\end{pmatrix}&\end{aligned}$$

Vilket alltså är en lösning till systemet (verifierande av detta lämnas åt den intresserade läsaren) samt linjärt oberende med den första lösningen

$$y_1(t)=e^{3t}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

Detta följer av satserna i kompendiet, men kan även verifieras med att räkna ut Wronskis determinant för lösningarna (som inte får va 0 för att vektorerna skall vara linjärt oberende). Vi kan alltså bilda ett fundamentalsystem för systemet och dra slutsatsen att alla lösningar kommer att ha formen:

$$\overline{y}(t)=C_1e^{3t}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}+C_2e^{3t}\begin{pmatrix}1-2t\\ 1+2t\end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix}-C_1+C_2(1-2t)\\ C_1+C_2(1+2t)\end{pmatrix}$$

4. Lös DE-systemet

$$\begin{aligned}y_1'(t)&=y_1(t)-y_2(t)\\ y_2'(t)&=5y_1(t)-3y_2(t)\end{aligned}$$

med hjälp av elimineringsmetoden.

Lösning: Sen lite alternativa sätt för att lösa ekvationssystem. Detta byger på manipulation av de enskillda ekvationerna. Från första ekvationen får vi genom att derivera att:

$$y_1'(t) = y_1(t) - y_2(t) \Rightarrow y_1''(t) = y_1'(t) - y_2'(t) \Leftrightarrow y_2'(t) = y_1'(t) - y_1''(t)$$
$$y_1'(t) = y_1(t) - y_2(t) \Leftrightarrow y_2(t) = y_1(t) - y_1'(t)$$

Dessa kan vi nu substituera in i andra ekvationen och få:

$$\begin{aligned} y_2'(t) &= 5y_1(t) - 3y_2(t) \Rightarrow \\ y_1'(t) - y_1''(t) &= 5y_1(t) - 3(y_1(t) - y_1'(t)) \Leftrightarrow \\ y_1''(t) &+ 2y_1'(t) + 2y_1(t) = 0 \end{aligned}$$

Dvs. $y_1(t)$ uppfyller en andra ordningens D.E med konstanta koefficienter. Dessa kan vi redan lösa. Vi söker tillnäst rötterna till karakteristiska polynomet:

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = -1 \pm i$$

Vi hittade alltså ett komplext par av rötter. Som vi redan vet så betyder detta att fundametalsystemet för den andra ordningens D.E:n vi håller på att lösa utgörs av: $\{e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t)\}$ så vi kan dra slutsatsen att:

$$\begin{aligned} &y_1(t) = C_1e^{-t}\cos(t) + C_2e^{-t}\sin(t) = e^{-t}(C_1\cos(t) + C_2\sin(t)) \Rightarrow \\ &y_1'(t) = -e^{-t}(C_1\cos(t) + C_2\sin(t)) + e^{-t}(-C_1\sin(t) + C_2\cos(t)) = \\ &e^{-t}((C_2 - C_1)\cos(t) - (C_2 + C_1)\sin(t)) \end{aligned}$$

Nu kan vi använda detta och att vi redan vet att $y_2(t) = y_1(t) - y_1'(t)$ för att lösa $y_2(t)$:

$$\begin{aligned} y_2(t) = y_1(t) - y_1'(t) = e^{-t}(C_1\cos(t) + C_2\sin(t)) - (e^{-t}((C_2 - C_1)\cos(t) - (C_2 + C_1)\sin(t))) = \\ e^{-t}((2C_1 - C_2)\cos(t) + (2C_2 + C_1)\sin(t) \end{aligned}$$

Nu har vi alltså hittat både $y_1(t)$ och $y_2(t)$ och därmed löst uppgiften:

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{-t}(C_1\cos(t) + C_2\sin(t)) \\ y_2(t) = e^{-t}((2C_1 - C_2)\cos(t) + (2C_2 + C_1)\sin(t) \end{cases}$$

5. Lös det non-homogena lineära DE-systemet

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) + y_2(t) + e^{-t} \\ y_2'(t) &= y_1(t) + y_2(t) + e^{t} \end{aligned}$$

genom formeln för variering av konstanterna. *Tips:* motsvarande homogena DE-system löstes i uppgift 5:1 och inversen $Y(t)^{-1}$ till en fundamentalmatris $Y(t)$ bestämdes i uppgift 6:1.

Lösning: Vi börjar med att skriva systemet i matrisform:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$$

Nu, som tipset nämner så har vi redan tidigare löst motsvarande homogena system. Dess lösningar har alla formen:

$$\overline{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 e^{2t} \\ -C_1 + C_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

Och dess fundametalmatris $Y(t)$ utgörs av

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^2 t \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Nu, precis som med non-homogena ekvationerna vi löst tidigare så måste vi hitta en specifik lösning $\overline{y}_1(t)$ till systemet. Alla lösningar kommer då att ha formen: $\overline{y}(t) + \overline{y}_1(t)$. Nu enligt den teori som visats på föreläsningarna kommer denna specifika lösning att vara av formen:

$$\overline{y}_1(t) = Y(t)c(t)$$

Där:

$$c(t) = \int^t \left(Y^{-1}(s) \begin{pmatrix} e^{-s} \\ e^{s} \end{pmatrix} \right) ds$$

Nu har vi redan i uppgift 1 räknat ut $Y^{-1}(t)$ så vi börjar med att utföra matrismultiplikationen:

$$Y^{-1}(t) \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{t} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{t} \\ \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} - e^{t} \\ e^{-3t} + e^{-t} \end{pmatrix}$$

Nu kan vi fortsätta och räkna ut $c(x)$:

$$c(t) = \int^t \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-s} - e^{s} \\ e^{-3s} + e^{-s} \end{pmatrix} ds = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{-t} - e^{t} \\ -\frac{e^{-3t}}{3} - e^{-t} \end{pmatrix} =$$
$$-\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3e^{-t} + 3e^{t} \\ e^{-3t} + 3e^{-t} \end{pmatrix}$$

Nu kan vi räkna ut specifika lösningen på vårt system $\overline{y}_1(t)$:

$$\overline{y}_1(t) = Y(t)c(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^2t \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3e^{-t} + 3e^t \\ e^{-3t} + 3e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & e^2t \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{-t} + 3e^t \\ e^{-3t} + 3e^{-t} \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3e^{-t} + 3e^t + e^{-t} + 3e^t \\ -3e^{-t} - 3e^t + e^{-t} + 3e^t \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4e^{-t} + 6e^t \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t - \frac{2}{3}e^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{-t} \end{pmatrix}$$

Så alla lösningar till vårt system $\overline{x}(t)$ kommer att ha formen:

$$\overline{x}(t) = \overline{y}(t) + \overline{y}_1(t) = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 e^{2t} \\ -C_1 + C_2 e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^t - \frac{2}{3}e^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{-t} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} C_1 + C_2 e^{2t} - e^t - \frac{2}{3}e^{-t} \\ -C_1 + C_2 e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-t} \end{pmatrix}$$

6. Lös det non-homogena lineära DE-systemet

$$y_1'(t) = y_1(t) + y_2(t) + \sin t$$
$$y_2'(t) = y_1(t) + y_2(t) + \cos t$$

med försöket $t \mapsto (\sin t)\overline{a} + (\cos t)\overline{b}$, där $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbf{R}^2$ är obekanta vektorer.

Lösning: Kursens sista räkneövning. Vi skall lösa ett till nonhomogent system, denna gången med hjälp av metoden av obestämda koeficcienter ("gissning"). Metoden liknar mycket den vi hade med enskillda ekvationer. Vi börjar med att skriva vårt system i matrisform:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Det handlar alltså om samma nonhomega system som i tidigare system. Vi vet att dens lösningar är av formen:

$$\overline{y}(t) = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 e^{2t} \\ -C_1 + C_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

Nu precis som tidigare måste vi hitta en specifik lösning $\overline{y}_1(t)$ till nonhomogena systemet, dens alla lösningar kommer nämligen vara homogena systemets lösningar plus denna specifika lösning. Vi definierar:

$$\overline{y}_1(t) = (\sin t) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + (\cos t) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Och undersöker för hurudana a_1, a_2, b_1, b_2 vektorn uppfyller vårt system. Vi gör detta genom att derivera och sen subtituera in i systemet:

$$\overline{y}_1(t) = \sin t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{y}_1'(t) = \cos t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} a_1 \cos t - b_1 \sin t \\ a_2 \cos t - b_2 \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \sin t + b_1 \cos t + a_2 \sin t + b_2 \cos t \\ a_1 \sin t + b_1 \cos t + a_2 \sin t + b_2 \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \cos t - b_1 \sin t \\ a_2 \cos t - b_2 \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t(a_1 + a_2 + 1) + \cos t(b_1 + b_2) \\ \sin t(a_1 + a_2) + \cos t(b_1 + b_2 + 1) \end{pmatrix}$$

Eftersom det sista skall gälla för alla t så måste koefficienterna för sin och cos på båda raderna vara lika med varandra. Vi får alltså följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} a_1 = b_1 + b_2 & \Rightarrow a_1 - b_1 - b_2 = 0 \\ -b_1 = a_1 + a_2 + 1 & \Rightarrow a_1 + a_2 + b_1 = -1 \\ a_2 = b_1 + b_2 + 1 & \Rightarrow a_2 - b_1 - b_2 = 1 \\ -b_2 = a_1 + a_2 & \Rightarrow a_1 + a_2 + b_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Så nu har vi ett 4-variablers ekvationssystem av formen $Ax = b$ att lösa. Vi löser den med metoder från linjär algebran, genom att studera sammansatta matrisen: $A|b$ och sedan reducera A till enhetsmatrisen: (mycket mekaniska mellansteg som inte visas här, detta kan man t.ex. göra med räknare relativt enkelt):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\implies \begin{cases} a_1 = -\frac{3}{5} \\ a_2 = \frac{2}{5} \\ b_1 = -\frac{4}{5} \\ b_2 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Så vår specifika lösning $\overline{y}_1(t)$ blir:

$$\overline{y}_1(t) = (\sin t) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + (\cos t) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$$

$$(\sin t) \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} + (\cos t) \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \left((\sin t) \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + (\cos t) \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Och som sagt så kommer alla lösningar till systemet att ha formen:

$$\overline{y}(t) = \begin{pmatrix} C_1 + C_2e^{2t} \\ -C_1 + C_2e^{2t} \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\left((\sin t)\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + (\cos t)\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Tack för mig och lycka till med kursprovet!