INSTITUTET FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Diferentialekvationer II
Övning 5, Svarsförslag
14.4.2011
Jeremias Berg

1. Lös det lineära homogena DE-systemet

$$y_1'(t) = y_1(t) + y_2(t)$$
$$y_2'(t) = y_1(t) + y_2(t).$$

Lösning: Nu är det då dags för kursens sista ämne, lösning av D.E system. För alla dessa uppgifter gäller att lösningsmetoden är mycket liknande, man söker först egenvärdena och sen egenvektorerna för systemen. Så länge man förstår metoden så handlar uppgifterna egentligen ganska mycket om mekaniskt räknande.

Vi börjar med att skriva den givna ekvationen i matrisform:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Vi söker nu egenvärdena för $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisen. Dvs vi söker λ så att:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \mathbf{I}_2\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$

Vi räknar:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) = (1-\lambda)^2 - 1$$

$$(1-\lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Nu har vi alltså löst egenvärdena för matrisen, nu måste vi ännu hitta egenvektorerna. Dvs. för alla egenvärden λ_0 söker vi en vektor $\overline{u}_0$ så att

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_0 \end{pmatrix} \overline{u}_0 = \overline{0}$$

Vi beteknar $\overline{u} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$. Nu räknar vi ut egenvektorerna för båda egenvärden:

"$\lambda = 0$"
Nu söker vi alltså $u_1(t)$ och $u_2(t)$ så att:

$$\begin{pmatrix} 1-0 & 1 \\ 1 & 1-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \overline{0}$$

Vi räknar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u_1(t) + u_2(t) = 0 \Leftrightarrow u_1(t) = -u_2(t) \\ u_1(t) + u_2(t) = 0 \Leftrightarrow u_1(t) = -u_2(t) \end{cases}$$

Med hjälp av detta kan vi skriva:

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_2(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = u_2(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nu eftersom vi bara är intresserade oss av en lösning får vi välja $u_2(t) = 1$ så får vi att den sökta egenvektorn blir

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

"$\lambda = 2$"
Nu räknar vi på ett likannde sätt ut andra egenvektorn. Dvs vi vill räkna $\overline{u}$ för vilket det gäller:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ 1 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \overline{0}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \overline{0} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -u_1(t) + u_2(t) = 0 \Leftrightarrow u_1(t) = u_2(t) \\ u_1(t) - u_2(t) = 0 \Leftrightarrow u_1(t) = u_2(t) \end{cases}$$

Igen kan vi alltså skriva:

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = u_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Och få att den andra egenvektorn är:

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nu eftersom egenvärdena för matrisen inte var samma kommer egenvektorerna att vara linjärt oberoende. Detta bevisas i kompendiet men är man osäker går det att kollas med en Wronskis determinant för dem. Nu kan vi forma ett fundamtalsystem för lösningarna av ekvationssytemet, dvs. alla lösningar kommer att ha formen:

$$\overline{y}(t) = C_1 e^{0t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Märk att i alla dessa finns det olika lösningar, just p.g.a. konstanterna. Vi skulle i sökandet av första egenvektorn kunna ha substituerat: $u_2 = -u_1$ och fått att den vektorn skulle ha blivit: $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ Vilket skulle ha varit lika rätt, i praktiken kommer isfl. konstanten C_1 att ändra tecken.

2. Sök allmänna lösningen till DE-systemet

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\2 & 0 & 2\\4 & 2 & 3\end{pmatrix}\overline{y}(t).$$

Lösning: Som nämnt tidigare så är principen för dessa uppgifter liknande. Vi börjar igen med att söka egenvärdena för matrisen

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\2 & 0 & 2\\4 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

. Vi söker λ s.a:

$$\begin{aligned}
0 = \det\left(\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\2 & 0 & 2\\4 & 2 & 3\end{pmatrix} - \lambda\mathbf{I}_3\right) &= \\
\det\begin{pmatrix}3-\lambda & 2 & 4\\2 & -\lambda & 2\\4 & 2 & 3-\lambda\end{pmatrix} &= \\
(3-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & 2\\2 & (3-\lambda)\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2 & 2\\4 & (3-\lambda)\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}2 & -\lambda\\4 & 2\end{vmatrix} &= \\
(3-\lambda)(-\lambda(3-\lambda)-4) - 2(2(3-\lambda)-8) + 4(4+4\lambda) &= \\
(3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) - 2(-2-2\lambda) + 16 + 16\lambda &= \\
(3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) + 20 + 20\lambda &= \\
(3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) + 20(\lambda+1) = (1+\lambda)((3-\lambda)(\lambda-4)+20) &= \\
(1+\lambda)(3\lambda-12-\lambda^2+4\lambda+20) = (1+\lambda)(-\lambda^2+7\lambda+8) &= \\
-(1+\lambda)(\lambda^2+7\lambda+8) = -(1+\lambda)(\lambda-8)(\lambda+1) = -(\lambda+1)^2(\lambda-8) & \\
\Leftrightarrow -(\lambda+1)^2(\lambda-8) = 0 \Rightarrow & \begin{cases}\lambda = -1\\ \lambda = 8\end{cases}
\end{aligned}$$

Vi hittade alltså två egenvärden. Eftersom vår orginala matris var symetrisk så kommer den ändå ha 3 linjärt oberoende egenvektorer (sats 6.14) Vi söker dessa:

"$\lambda = 8$"

Nu söker vi igen $\overline{u} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$ s.a:

$$\begin{pmatrix} 3-8 & 2 & 4 \\ 2 & 0-8 & 2 \\ 4 & 2 & 3-8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \overline{0}$$

Vi radreducerar matrisen till en trappstegsmatris. Märk att eftersom matrisen på högra sidan av ekvationen består endast av nollor så behöver vi inte ha med den i reduceringen:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 0 & -18 & 9 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nu skulle vi från sista raden få $0u_3 = 0$ så vi kan välja $u_3 = t$. Baserat på detta får vi nu:

$$-2u_2 + u_3 = 0 \Leftrightarrow u_2 = \frac{t}{2}$$
$$-5u_1 + 2u_2 + 4u_3 = 0 \Leftrightarrow 5u_1 = 5t \Leftrightarrow u_1 = t$$
$$\overline{u} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{t}{2} \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Men vi söker igen bara 1 lösning så vi kan välja $t = 1$ och få

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

"$\lambda = -1$"

Nu skall vi hitta $\overline{u}$ som satisfierar:

$$\begin{pmatrix} 3-(-1) & 2 & 4 \\ 2 & 0-(-1) & 2 \\ 4 & 2 & 3-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \overline{0}$$

Vi radreducerar igen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nu får vi från översta raden att $2u_1 + u_2 + 2u_3 = 0 \Leftrightarrow u_1 = -\frac{u_2}{2} - u_3$. Och vidare att:

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{u_2}{2} - u_3 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi kan välja $u_2 = u_3 = 1$ och få

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Och vi kan igen stöda oss på satserna 6.10, 6.12 och 6.14 för att bilda ett fundamentalsystem för givna ekvationen. Alla lösningar till den kommer att ha formen:

$$\overline{y}(t) = C_1 e^{8t} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Låt $\alpha > 0$, $\beta > 0$ vara konstanter. DE-systemet

$$y_1'(t) = -\alpha y_2(t)$$
$$y_2'(t) = -\beta y_1(t)$$

beskriver antalet bakterier $y_1(t)$ och $y_2(t)$ vid tiden $t \geq 0$ i en population där bakteriearterna förtär varandra utan att förökas. Hur förhåller sig $y_1(0)$ och $y_2(0)$ till varandra om vi vet att $y_1(t) > 0$ och $y_2(t) > 0$ för varje $t \geq 0$?

Lösning: en lite annorlunda uppgift. Vi börjar med att skriva systemet i matrisform:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -\alpha y_2(t) \\ y_2'(t) = -\beta y_1(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Nu kan vi lösa detta system precis som tidigare. Genom att först söka egenvärdena:

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha \\ -\beta & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \alpha\beta \Leftrightarrow$$
$$\lambda = \pm\sqrt{\alpha\beta}$$

Igen 2 egenvärden, precis som förväntat. Nu söker vi egenvektorerna:

"$\lambda = \sqrt{\alpha\beta}$"

Söker alltså $\overline{u}$ s.a:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha\beta} & -\alpha \\ -\beta & -\sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \overline{0}$$

För att lösa detta radreducerar vi matrisen till (multiplicera övre raden med β och nedre med $\sqrt{\alpha\beta}$:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha\beta} & -\alpha \\ -\beta & -\sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha\beta} & -\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dvs. $u_1 = -\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta}} u_2$ och:

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nu får vi igen välja u_2 så för enkelhetens skull väljer vi $u_2 = \beta$ och får att egenvektorn blir

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha\beta} \\ \beta \end{pmatrix}$$

"$\lambda = -\sqrt{\alpha\beta}$"
Nu försöker vi lösa u_1 och u_2 ur:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha\beta} & -\alpha \\ -\beta & \sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \overline{0}$$

Denna matris kan också reduceras (multiplicera t.ex. övre raden med β och nedre med $\sqrt{\alpha\beta}$):

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha\beta} & -\alpha \\ -\beta & \sqrt{\alpha\beta} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha\beta} & -\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dvs. $u_1 = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta}} u_2$ så vi får vår egenvektor som:

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi väljer igen $u_2 = \beta$ och får

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha\beta} \\ \beta \end{pmatrix}$$

Som tidigare så var egenvärdena olika, vilket leder till att motsvarande egenvektorer är linjärt oberoende så alla lösningar till systemet kommer att vara av formen:

$$\overline{y}(t) = C_1 e^{t\sqrt{\alpha\beta}} \begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha\beta} \\ \beta \end{pmatrix} + C_2 e^{-t\sqrt{\alpha\beta}} \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha\beta} \\ \beta \end{pmatrix}$$

Om vi nu substituerar $t = 0$ så får vi att:

$$\overline{y}(0) = \begin{pmatrix} -C_1\sqrt{\alpha\beta} + C_2\sqrt{\alpha\beta} \\ C_1\beta + C_2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha\beta}(C_2 - C_1) \\ \beta(C_1 + C_2) \end{pmatrix}$$

$$\frac{y_1(0)}{y_2(0)} = \frac{\sqrt{\alpha}(C_2 - C_1)}{\sqrt{\beta}(C_1 + C_2)}$$

Så ser vi att vi tiden 0 måste $C_2 \geq C_1$ eftersom annars skulle $y_1(t) < 0$. Vi ser också att $y_1(0)$:s och $y_2(0)$:s förhållande till varan beror mest på rötterna av α och β, vilka vi ocks[vet att existerar eftersom $\alpha > 0$ $\beta > 0$.

4. Sök allmänna lösningen till DE-systemet

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overline{y}(t).$$

Tips: karakteristiska polynomet är $p(\lambda) = -(\lambda - 5)(\lambda - 2)^2$.

Lösning: Åter igen en liknande uppgift. Denna gång fick vi karakteristiska polynomet "gratis". Detta betyder att vi kan lösa egenvärdena genom att sätta $p(\lambda) = 0$:

$$-(\lambda - 5)(\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 5 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Så vi hittade 2 egenvärden. Men som tidigare kan vi även här konstatera att det handlar om ett symmetriskt system, så vi kommer att hitta 3 egenvektorer, vilka kommer att vara linjärt oberoende. Vi söker dem tillnäst:

"$\lambda = 5$"
Vi söker alltså $\overline{u}$ så att:

$$\begin{pmatrix} 3-5 & 1 & 1 \\ 1 & 3-5 & 1 \\ 1 & 1 & 3-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \overline{0}$$

Vi kan radreducera och få:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Härifrån får vi från tredje raden att $0u_3 = 0$ så vi kan välja $u_3 = t$. Sen får vi från de andra raderna att:

$$\begin{aligned} u_2 - t = 0 &\Leftrightarrow u_2 = t \\ u_1 - \frac{t}{2} - \frac{t}{2} = 0 &\Leftrightarrow u_1 = t \\ \overline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} &= t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Men som vanligt vill vi bara ha en lösning och väljer därför t = 1 och får egenvektorn att bli:

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

"$\lambda = 2$" Vi söker nu andra paret av egenvektorer. Dvs. vi skall lösa

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 1 \\ 1 & 3-2 & 1 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \overline{0}$$

Vi radreducerar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Varifrån vi ser att $u_1 = -u_2 - u_3$ så vi kan skriva de sökta egenvektorerna som:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_2 - u_3 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nu så vet vi igen med stöd av satserna i kap 6.3 att alla dessa egenvektorer är linjärt oberoende, så den allmänna lösningen till ekvationen kommer att vara av formen:

$$\overline{y}(t) = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Sök alla lösningar till DE-systemet

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) &= -y_1(t) + 2y_2(t). \end{aligned}$$

Lösning: I matrisform blir systemet:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Som vanligt börjar vi lösandet med att hitta egenvärden:

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 \Leftrightarrow$$
$$\lambda = 2 \pm i$$

Nu hittade vi två komplexa egenvärden. Nu måste vi tillämpa teorin i kapitel 6.4 och specifikt sats 6.17. Vi försöker först hitta en egenvektor av formen $\overline{u} = \overline{a} + i\overline{b}$ för någondera värdet. Eftersom komplexa egenvärdena alltid uppkommer parvis så kommer vi att kunna tillämpa sats 6.17 så länge som vi hittar en egenvektor. Vi väljer $\lambda = 2 + i$:

Vi söker $\overline{u}$ helt normalt:

$$\begin{pmatrix} 2-(2+i) & 1 \\ -1 & 2-(2+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \overline{0}$$

$$\begin{cases} -iu_1 + u_2 & = 0 \\ -u_1 - iu_2 & = 0 \end{cases}$$

$$-u_1(i+1) + (1-i)u_2 = 0 + 0 \Leftrightarrow$$

$$(1-i)u_2 = (1+i)u_1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1-i}{1+i}u_2 = u_1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}u_2 = u_1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}u_2 = u_1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-2i}{2}u_2 = u_1 \Leftrightarrow -iu_2 = u_1$$

Här har vi alltså bara räknat ut matrissystemet, adderat ihop ekvationerna och sedan manipulerat oss fram till sista raden. Nu kan vi skriva den sökta egenvektorn som:

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = u_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Nu när vi ännu konstaterar att $\lambda = 2 + i \Rightarrow \alpha = 2 \ \beta = 1$ så är vi klara för att använda oss av sats 6.17. Det givna systemets fundamentalsystem består alltså av vektorerna:

$$x_1(t) = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(t) \right)$$

$$x_2(t) = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(t) \right)$$

Och alla lösningar är av formen:

$$\overline{y}(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

6. Lös initialvärdesproblemet

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overline{y}(t), \quad \overline{y}(0) = (1,1,1)^T.$$

Lösning: Vi börjar igen med att söka egenvärdena:

$$\begin{aligned} 0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= \\ (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= \\ (1-\lambda)((1-\lambda)^2+1) = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+2) &\Leftrightarrow \\ \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 1 \pm i \end{cases} & \end{aligned}$$

Denna gång har vi en blanding av tidigare upgifterna, både ett reelt samt ett komplext par av egenvärden. Vi räknar ut egenvektorerna:

"$\lambda = 1$"
Vi skall lösa u_1, u_2, u_3 ur:

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & -1 \\ 0 & 1 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \overline{0}$$

$$\begin{cases} 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 = 0 \\ 0u_1 + 0u_2 - u_3 = 0 \\ 0u_1 + u_2 + 0u_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} u_1 = t \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

Dvs. genom att välja $t = 1$ får vi att den sökta egenvektorn blir $\overline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

"$\lambda = 1 + i$"
Vi söker nu egenvektorerna för komplexa egenvärdena. Precis som i förra uppgiften:

$$\begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \overline{0}$$

$$\begin{cases} -iu_1 + 0u_2 + 0u_3 = 0 \\ 0u_1 - iu_2 - u_3 = 0 \\ 0u_1 + u_2 - iu_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_1 = 0$$

$$\begin{cases} -iu_2 - u_3 = 0 \\ u_2 - iu_3 = 0 \end{cases}$$

$$u_2(1-i) - u_3(1+i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$u_2 = \frac{1+i}{1-i} u_3 \Leftrightarrow$$

$$u_2 = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} u_3 \Leftrightarrow$$

$$u_2 = \frac{1+2i+i^2}{2} u_3 \Leftrightarrow u_2 = iu_3$$

Så vår egenvektor blir:

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ iu_3 \\ u_3 \end{pmatrix} =$$

$$u_3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Väljer } u_3 = 1 \ \Rightarrow \overline{u} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Nu så gäller ännu $\lambda = 1 + i \Rightarrow \alpha = 1 \ \beta = 1$ så vi kan applicera sats 6.17 igen. Detta egenvärde motsvaras alltså av lösningsparet:

$$x_1(t) = e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(t) \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^t \sin t \\ e^t \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$x_2(t) = e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(t) \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \cos(t) \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$$

Så den almänna lösningen till systemet kommer att ha formen:

$$\overline{y}(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -e^t \sin t \\ e^t \cos(t) \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \cos(t) \\ e^t \sin t \end{pmatrix} =$$

$$e^t \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \cos(t) - C_2 \sin(t) \\ C_3 \sin(t) + C_2 \cos(t) \end{pmatrix}$$

Nu har vi ännu I.V.P:n kvar:

$$\overline{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$e^0 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \cos(0) - C_2 \sin(0) \\ C_3 \sin(0) + C_2 \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = 1 \end{cases}$$

Så den sökta lösningen blir:

$$\overline{y}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(t) - \sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$$