INSTITUTET FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Diferentialekvationer II
Övning 4, Svarsförslag
7.4.2011
Jeremias Berg

1. Bestäm derivatan $\overline{y}'(t)$, då vektorfunktionen $\overline{y}(t)$ definieras av

$$(i)\ \overline{y}(t) = (e^{-2t}, te^{t})^T, \quad (ii)\ \overline{y}(t) = (1, e^t \cos t, e^t \sin t)^T.$$

Lösning: En relativt simpel uppgift. Derivatan av en vektorfunktion är helt enkelt de enskilda komponentena deriverade skillt för sig:

$$i)(\overline{y})'(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}e^{-2t} \\ \frac{d}{dt}te^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ e^t(1-t) \end{pmatrix}$$

$$ii)(\overline{y})'(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}1 \\ \frac{d}{dt}e^t \cos t \\ \frac{d}{dt}e^t \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t(\cos t - \sin t) \\ e^t(\sin t + cost) \end{pmatrix}$$

2. Skriv följande lineära DE-system i matrisform:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= ty_1(t) - y_2(t) + e^t y_3(t) + \sin t \\ y_2'(t) &= -y_1(t) + t^2 y_2(t) + 2y_3(t) \\ y_3'(t) &= 2y_1(t) + y_2(t) - t^2 y_3(t). \end{aligned}$$

Lösning: Inte heller så hemskt krångligt. Det enda vi måst tänka på är att sätta $\sin t$ skillt i sin egen matris:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -1 & e^t \\ -1 & t^2 & 2 \\ 2 & 1 & -t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Sök lösningsbanorna $(x(t), y(t))$ i implicit form till systemet

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(1 + x^2 + y^2) \\ y'(t) &= -2x(1 + x^2 + y^2) \end{aligned}$$

genom att substitutera $z(s) = y(x^{-1}(s))$ (se Exempel 5.7 i kompendiet).

Lösning: Sedan lite mer att räkna. Temat för kursens denna del är analysering av “svåra” ekvationssystem, dvs. ekvationssystem som inte nödvändigtvis går att lösa i sluten form. Men även sådana kan man med hjälp av jämviktslösningarna och entydighetssatsen analysera, just t.ex. som vi kommer att göra här.

Vi väljer en punkt t_0 som ligger någonstans på lösningsintervallet och för vilken det gäller att $y(t_0) \neq 0$. Här antar vi alltså att y inte är noll funktionen. Nu så är $x'(t_0)$ inte heller 0 så enligt resultat från analysen finns det en omgivning U till t_0 där $x(t)$ är en injektion. Dvs. i denna omgivning går det att definera inversfunktionen $x^{-1}(s)$. Nu kan vi även definiera en ny funktion $z(s) = y(x^{-1}(s))$ som också tipsas om. Om vi nu låter $s = x(t)$ och deriverar med avseende på t så får vi med hjälp av kedjeregeln, märk att vi har valt U så att $x'(t) \neq 0$:

$$\begin{aligned} x^{-1}(x(t)) &= t \\ \frac{d}{dt}(x^{-1}(x(t))) = (x^{-1})'(x(t))x'(t) = \frac{d}{dt}t = 1 \Leftrightarrow (x^{-1})'(x(t)) &= \frac{1}{x'(t)} \\ z'(x(t)) = y'(x^{-1}(x(t)))(x^{-1})'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-2x(1+x^2+y^2)}{y(1+x^2+y^2)} &= \frac{-2x}{y} \end{aligned}$$

Nu eftersom $z(x(t)) = y(x^{-1}(x(t))) = y(t)$ så kan vi skriva sista ekvationen som:

$$z'(x(t)) = \frac{-2x}{z(x(t))}$$

Detta är en första ordningens separerbar D.E som inte har triviala lösningar. Vi löser den tillnäst och substituerar sen tillbaka för y.

$$\begin{aligned} z'(x(t)) = \frac{-2x}{z(x(t))} &\Leftrightarrow \\ \int^z s ds = \int^x -2t dt &\Leftrightarrow \\ \frac{z(x(t))^2}{2} = -x^2 + C &\Leftrightarrow \\ \frac{y(t)^2}{2} + x(t)^2 &= C \end{aligned}$$

Dvs. lösningsbanorna kommer att bilda en ellips runt origo. Det kan också vara värt att pointera ut att $(0,0)$ skulle ha varit en jämviktslösning till systemet, samt att detta alltså inte krävde lösning av $y(t)$ och $x(t)$ i något skede.

4. Låt $t \mapsto \overline{y}(t)$ vara en lösning till det lineära DE-systemet

$$\overline{y}'(t) = A(t)\overline{y}(t) + \overline{b}(t)$$

på det öppna intervallet $I \subset \mathbf{R}$. Visa: om $\overline{y}(t_0) \neq \overline{0}$ för något $t_0 \in I$, så är $\overline{y}(t) \neq \overline{0}$ för alla $t \in I$. *Tips:* entydighetssatsen för lineära DE-system.

Lösning: En uppgift som till en början verkar konstig, man kan rätt så enkelt hitta på motexempel till vad den påstår. Uppgiften blir klarare dock då man sätter till antagandet att $\overline{b}(t) = 0 \ \forall t \in I$, dvs det måste vara ett homogent system. Extra antagande som är underförstått är att $A(t)$ är kontinuerlig på hela I Vi bör nu visa

$$p_1 \Rightarrow p_2$$

Där $p_1 = \exists t_0 \in I \ (\overline{y}(t_0) \neq \overline{0})$ och $p_2 = \forall t \in I \ (\overline{y}(t) \neq \overline{0})$. Detta blir lättare om vi istället visar det ekvivalenta:

$$\neg p_2 = \exists t_0 \in I(\overline{y}(t) = \overline{0}) \Rightarrow \forall t \in I(\overline{y}(t_0) = \overline{0}) = \neg p_1$$

Nu har vi alltså antagandet $\exists t_0 \in I(\overline{y}(t) = \overline{0})$. För detta t_0 är alltså $\overline{y}(t) = \overline{0}$ och därmed också $(\overline{y})'(t) = \overline{0}$ och $A(t)\overline{y}(t) = 0$ men $\overline{y}(t)$ är fortfarande en lösning till vår ekvation,

Vi ser dessutom enkelt att noll vektorn (dvs. vektorn som antar värdet $0 \ \forall t \in I$) också löser ekvationen. Nu eftersom noll vektorn också är kontinuerlig kan vi hänvisa till entydighetssatsen och säga att $\overline{0}$ är den enda lösningen till ekvationen med detta initialvärde på hela I. Dvs. för den, i uppgiften givna lösningen, $\overline{y}$ måste med våra antaganden gälla $\overline{y} = \overline{0}$. Vilket visar att $\forall i \in I : \overline{y} = \overline{0}$

5. Verifiera att $(\overline{y}^1(t), \overline{y}^2(t))$ är ett fundamentalssystem av lösningar till det homogena systemet

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \overline{y}(t),$$

då $\overline{y}^1(t) = e^{7t}(2,1)^T$ och $\overline{y}^2(t) = e^{-5t}(-2,1)^T$.

Lösning: För att verifiera ett fundamentalsystem till ett D.E system måste vi göra 2 saker. Vi måste verifiera att alla vektorer löser systemet skillt för sig samt att vektorerna är linjärt oberoende, (Wronskis determinant för dem är inte 0).

Vi börjar med att verifiera att vektorerna löser systemet skillt för sig:

$$\overline{y}^1(t) = \begin{pmatrix} 2e^{7t} \\ e^{7t} \end{pmatrix} \Rightarrow (\overline{y}^1)'(t) = \begin{pmatrix} 14e^{7t} \\ 7e^{7t} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{7t} \\ e^{7t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{7t} + 12e^{7t} \\ 6e^{7t} + e^{7t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14e^{7t} \\ 7e^{7t} \end{pmatrix}$$

Så $\overline{y}^1(t)$ är faktiskt en lösning. Nu gör vi samma för $\overline{y}^2(t)$:

$$\overline{y}^2(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-5t} \\ e^{-5t} \end{pmatrix} \Rightarrow (\overline{y}^2)'(t) = \begin{pmatrix} 10e^{-5t} \\ -5e^{-5t} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2e^{-5t} \\ e^{-5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-5t} + 12e^{-5t} \\ -6e^{-5t} + e^{-5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10e^{-5t} \\ -5e^{-5t} \end{pmatrix}$$

Så även $\overline{y}^2(t)$ är en lösning. Det som återstår är deras Wronskis determinant:

$$W(\overline{y}^1(t), \overline{y}^2(t)) = \begin{vmatrix} 2e^{7t} & -2e^{-5t} \\ e^{7t} & e^{-5t} \end{vmatrix} = 2e^{7t} \cdot e^{-5t} - (-2e^{-5t} \cdot e^{7t}) = 2e^{2t} + 2e^{2} = 4e^{2t} > 0 \,\forall t$$

Eftersom två av hittade lösningarna uppfyller det givna systmet och är oberoende bildar de faktiskt ett fundamentalsystem.

6. Verifiera att $(\overline{y}^1(t), \overline{y}^2(t), \overline{y}^3(t))$ är ett fundamentalssystem av lösningar till det homogena systemet

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overline{y}(t),$$

då $\overline{y}^1(t) = e^t(1, 0, -1)^T$, $\overline{y}^2(t) = e^{2t}(1, -1, -1)^T$ och $\overline{y}^3(t) = e^{-t}(1, 2, -7)^T$.

Lösning: Märk att här finns ett till tryckfel. I orginala uppgiftens matris var -2 talet längst ner till höger. För den matrisen är ingen av dom givna vektorerna en lösning, så de bildar inte heller ett fundamentalsystem. Här är talet ändrat till-1 vilket är vad det borde vara.

Vi måst igen visa att alla vektorer uppfyller systemet skillt för sig samt att de är oberoende. För den första gäller att:

$$\overline{y}^1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ -e^t \end{pmatrix} \Rightarrow (\overline{y}^1)'(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ -e^t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t + 0 + 0 \\ e^t + 0 - e^t \\ -2e^t + 0 + e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ -e^t \end{pmatrix}$$

För den andra att

$$\overline{y}^2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} \Rightarrow (\overline{y}^2)'(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ -2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} + e^{2t} + 0 \\ e^{t} - 2e^{2t} - e^{2t} \\ -2e^{2t} - e^{-2t} + e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ -2e^{2t} \end{pmatrix}$$

Och för den sista att:

$$\overline{y}^3(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ -7e^{-t} \end{pmatrix} \Rightarrow (\overline{y}^3)'(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ -2e^{-t} \\ 7e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ -7e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} - 2e^{-t} + 0 \\ e^{-t} + 4e^{-t} - 7e^{-t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-t} + 7e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ -2e^{-t} \\ 7e^{-t} \end{pmatrix}$$

Så alla 3 vektorer löser systemet skillt för sig. Det som återstår är wronskis determinant:

$$W(\overline{y}^1(t), \overline{y}^2(t), \overline{y}^3(t)) = \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} & e^{-t} \\ 0 & -e^{2t} & 2e^{-t} \\ -e^t & -e^{2t} & -7e^{-t} \end{vmatrix} = e^t \begin{vmatrix} -e^{2t} & 2e^{-t} \\ -e^{2t} & -7e^{-t} \end{vmatrix} + 0 - e^t \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ -e^{2t} & 2e^{-t} \end{vmatrix} =$$

$$e^t(-e^{2t}(-7e^{-t}) - 2e^{-t}(-e^{2t})) - e^t(e^{2t}2e^{-t} - e^{-t}(-e^{2t})) =$$

$$e^t(7e^t + 2e^t) - e^t(2e^t + e^t) = e^t(6e^t) > 0\,\forall t$$

Så vektorerna är linjärt oberoende och bildar därför ett fundamentalsystem.