INSTITUTET FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Diferentialekvationer II
Övning 3, Svarsförslag
31.3.3.2011
Jeremias Berg

1. Reducera differentialekvationen

$$y^{(4)} - 8y'' + 16y = \sin x$$

till ett 1. ordningens system i matrisformen med 4 obekanta funktioner.

Lösning: Detta är ganska straight - forward metodföljning. Låt först:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ y_4(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Med detta kan vi skriva orginala ekvationen som

$$y_4'(x) - 8y_3(x) + 16y_1(x) = \sin(x) \Leftrightarrow y_4'(x) = \sin(x) + 8y_3(x) - 16y_1(x)$$

Och systemet (1) som:

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \\ y_4'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_3(x) \\ y_4(x) \\ 8y_3(x) - 16y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(x) \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \\ y_4'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -16 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ y_4(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(x) \end{pmatrix}$$

2. Låt $V(x,y) = \delta \log(x) - cx + r\log(y) - by$ utgöra funktionen i den implicita lösningen av Lotka-Volterras system. Verifiera att $u(t) = V(\frac{\delta}{c}t, \frac{r}{b}t)$ är en strängt växande funktion av $t \in (0,1)$ samt att $\lim_{t\to 0^+} u(t) = -\infty$. *Tips*: undersök $u'(t)$.

Lösning: Lotka - Volterras system beskrivs i detalj på sidorna 31 -34 i kompendiet. Ekvationerna som utgör detta system är:

$$\begin{cases} x'(t) = rx - bxy \\ y'(t) = cxy - \delta y \end{cases} \tag{2}$$

Där r, b, c, δ är positiva konstanter. Nu för att lösa uppgiften måste vi visa att $u(t)$ är strängt växande mellan 0 och 1. Detta gör vi helt enkelt genom att derivera (Märk att i dessa uppgifter används beteckningen $\log(x)$ för att mena $\ln(x)$:

$$u(t) = V(\frac{\delta}{c}t, \frac{r}{b}t) = \delta \log(\frac{\delta}{c}t) - c\frac{\delta}{c}t + r\log(\frac{r}{b}t) - b\frac{r}{b}t =$$

$$\delta \log(\frac{\delta}{c}t) - \delta t + r\log(\frac{r}{b}t) - rt$$

$$u'(t) = \frac{\delta}{\frac{\delta}{c}t} \cdot \frac{\delta}{c} - \delta + \frac{r}{\frac{r}{b}t}\frac{r}{b} - r \Rightarrow$$

$$u'(t) = \frac{\delta}{t} - \delta + \frac{r}{t} - r = \delta\left(\frac{1}{t} - 1\right) + r\left(\frac{1}{t} - 1\right)$$

Härifrån ser vi att eftersom $t \in (0, 1)$ och $r > 0, \delta > 0$ så är $u'(t) > 0 \forall t \in (0, 1)$ Så funktionen är strängt växande. För att verifiera gränsvärdet observerar vi:

$$u(t) = \delta \log(\frac{\delta}{c}t) - \delta t + r\log(\frac{r}{b}t) - rt < \delta \log(\frac{\delta}{c}t) + r\log(\frac{r}{b}t)$$

Från analysen vet vi att $\lim_{t \to 0^+} \log(t) = -\infty$ Så det följer med en del regler om gränsvärdens egenskaper att också den i detta fallet mindre $u(t)$ kommer att gå mot negativa onändligheten då t går mot 0.

3. Låt $T > 0$ vara perioden av lösningsparet $(x(t), y(t))$ till Lotka-Volterras system, dvs. $x(T) = x(0)$ och $y(T) = y(0)$. Visa att medeltalen

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{\delta}{c}, \quad \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt = \frac{r}{b},$$

där $(\frac{\delta}{c}, \frac{r}{b})$ är jämviktslösningen till systemet. *Kommentar*: avsikten är att arbeta igenom detaljerna till uträkningen på sida 34 (kompendiet kapitel 2.2.3).

Lösning: Efter att ha läst igenom sidan som tipset nämner är resten av uppgiften inte speciellt krävande. Men dock ett bra exempel på kommande teman i kursen. Alltid går det nämligen inte att explicit lösa system av D.E:n. Däremot så kan vi ofa säga en hel del om lösningarna bara vi undersöker de konstanta lösningarna till ekvationerna, dvs. jämviktslösningarna. Dessa, tillsammans med info om derivatornas gränsvärden i oändligheten kan säga en hel del om lösningsbanorna, fast vi inte skulle kunna lösa dem. Så därför är det bra att förstå hur man hittar jämviktslösningar.

För denna uppgift behövde vi bara verifiera integralernas värden. Faktumet att funktionsparet $(\frac{\delta}{c}, \frac{r}{b})$ är en jämviktslösning till systemet (2) visas på sidan 32 i kompendiet. Vi visar först att

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{\delta}{c}$$

Från andra ekvationen till systemet (2) får vi att (med antagande att $y(t) \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{y'(t)}{y(t)} &= cx - \delta \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dt}\log(y(t)) &= cx - \delta\end{aligned}$$

Detta kan vi integrera mellan 0 och T med avseende på t:

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{d}{dt}\log(y(t))dt &= \int_0^T cx(t) - \delta dt \Leftrightarrow \\ \log(y(t))\Big|_0^T &= c\int_0^T x(t)dt - (\delta t)\Big|_0^T \Leftrightarrow \\ \log(y(T)) - \log(y(0)) &= c\int_0^T x(t)dt - \delta T \Leftrightarrow\end{aligned}$$

Nu fick vi från uppgiften att $y(T) = y(0)$ så vi kan fortsätta:

$$\begin{aligned}0 &= c\int_0^T x(t)dt - \delta T \Leftrightarrow \\ \delta T &= c\int_0^T x(t)dt \Leftrightarrow \\ \frac{\delta}{c}T &= \int_0^T x(t)dt \Leftrightarrow \\ \frac{\delta}{c} &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt\end{aligned}$$

Vilket skulle visas.

Tekniken för den andra integralen är mycket liknande. Nu börjar vi bara istället från första ekvationen av sytemet 2.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\log(x(t)) &= \frac{x'(t)}{x(t)} = r - by(t) \Rightarrow \\ \log(x(t))\Bigg|_0^T &= \int_0^T r - by(t)dt = rT - b\int_0^T y(t)dt \\ \log\left(x(T)\right) - \log\left(x(0\right) &= 0 = rT - b\int_0^T y(t)dt \\ b\int_0^T y(t)dt = rT &\Leftrightarrow \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt = \frac{r}{b}\end{aligned}$$

4. Sök jämviktslösningarna (x_0, y_0) till det autonoma systemet

$$x'(t) = \cos(y(t))$$
$$y'(t) = \sin(x(t)) - 1.$$

Lösning: Nu alltså mera jämviktslösningar. Detta betyder att vi söker konstanta funktioner som uppfyller de givna ekvationerna. Vi betecknar $x(t) = x_0$ och $y(t) = y_0$. För konstanta funktioner gäller att $x'(t) = 0 \quad y'(t) = 0$ så vi kan skriva om ekvationssystemet som:

$$\begin{cases} x'(t) & = \cos(y(t)) \\ y'(t) & = \sin(x(t)) - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \cos(y_0) \Rightarrow y_0 = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \\ 0 = \sin(x_0) - 1 \Rightarrow \sin(x_0) = 1 \Rightarrow x_0 = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi \end{cases}$$

Detta illustrerar även varför jämviktlösningar är så "kul". Vi hittade dessa relativt simpelt, att lösa ekvationerna allmänt skulle ha varit mycket jobbigare. Den intresserade läsaren kan t.ex. slå upp på nätet vad lösningarna till detta system skulle ha blivit.

5. Visa att $(0, 0)$ utgör enda jämviktslösningen till det lineära systemet

$$x'(t) = ax(t) + by(t)$$
$$y'(t) = cx(t) + dy(t)$$

om $ad - bc \neq 0$. (Kom ihåg: $ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.)

Lösning: Vi visar först att det finns endast en lösning. Detta gör vi genom att skriva om systemet i matrisform:

$$\begin{cases} x'(t) & = ax(t) + by(t) \\ y'(t) & = cx(t) + dy(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Eftersom det åter igen är tal om jämviktslösningar kan vi behandla matrissystemet precis som ett system för okända "konstanta"variabler, dvs. inte funktioner. Nu från linjär algebra vet vi att ett sådant system har en entydig lösning omm.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

Men detta fick vi ju som ett antagande i uppgiften, så vi vet att det existerar en entydig lösning.

Det som blir kvar är att verifiera att $x(t) = 0\, y(t) = 0$ är en lösning. Detta är rätt så trivialt:

$$x(t) = 0 \Rightarrow x'(t) = 0$$
$$y(t) = 0 \Rightarrow y'(t) = 0$$
$$\forall a, b, c, d \begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0 \\ c \cdot 0 + d \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

Så $x(t) = 0\, y(t) = 0$ är en lösning, och dessutom den enda jämviktslösningen.

6. Verifiera att $x(t) = e^{-t}\cos t$, $y(t) = e^{-t}\sin t$ löser systemet

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) - y(t) \\ y'(t) &= x(t) - y(t) \end{aligned}$$

då $t \in \mathbf{R}$. Vad händer med lösningsbanan $(x(t), y(t))$ då $t \to \infty$?

Lösning: Detta handlar åter igen bara om att verifiera en given lösning. Vi börjar med att derivera:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}\cos t \Rightarrow x'(t) = -e^{-t}\cos(t) + e^{-t} - \sin(t) = -e^{-t}(\cos(t) + \sin(t) \\ y(t) = e^{-t}\sin t \Rightarrow y'(t) = -e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t) = e^{-t}(\cos(t) - \sin(t)) \end{cases}$$

Nu studerar vi andra sidan av systemet:

$$\begin{cases} -x(t) - y(t) = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t = -e^{-t}(\cos t + \sin t) \\ x(t) - y(t) = e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t = e^{-t}(\cos t - \sin t) \end{cases}$$

Vilket alltså visar att $x(t) = e^{-t}\cos t$, $y(t) = e^{-t}\sin t$ är en lösning. Nu ser vi ännu att

$$|x(t)| = \left|\frac{\cos t}{e^t}\right| < \left|\frac{1}{e^t}\right| \to 0 \text{ när } t \to \infty$$

och:

$$|y(t)| = \left|\frac{\sin t}{e^t}\right| < \left|\frac{1}{e^t}\right| \to 0 \text{ när } t \to \infty$$

så båda funktionerna, går mot 0. Lösningsbanan går alltså mot $(0, 0)$, dvs. origo.