Differentialekvationer II
Räkneövning 6
28.4. 2011

1. Visa att matrisen

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$$

är inverterbar för varje $t \in \mathbf{R}$, och bestäm den inversa matrisen $Y(t)^{-1}$.

2. Bestäm den lösning till DE-systemet

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t) \end{aligned}$$

som satisfierar $(y_1(0), y_2(0)) = (0, 1)$.

3. Lös DE-systemet

$$\overline{y}'(t) = A\overline{y}(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tips: matrisen A har $r = 3$ som dubbelt egenvärde. Sök en andra lösningsfunktion $\overline{y}^2(t) = e^{3t}(\overline{v} + t(A - 3I)\overline{v})$, där $\overline{v} \in \mathbf{R}^2$ satisfierar $(A - 3I)^2\overline{v} = \overline{0}$.

4. Lös DE-systemet

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) &= 5y_1(t) - 3y_2(t) \end{aligned}$$

med hjälp av elimineringsmetoden.

5. Lös det non-homogena lineära DE-systemet

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) + y_2(t) + e^{-t} \\ y_2'(t) &= y_1(t) + y_2(t) + e^{t} \end{aligned}$$

genom formeln för variering av konstanterna. *Tips:* motsvarande homogena DE-system löstes i uppgift 5:1 och inversen $Y(t)^{-1}$ till en fundamentalmatris $Y(t)$ bestämdes i uppgift 6:1.

6. Lös det non-homogena lineära DE-systemet

$$y_1'(t) = y_1(t) + y_2(t) + \sin t$$
$$y_2'(t) = y_1(t) + y_2(t) + \cos t$$

med försöket $t \mapsto (\sin t)\overline{a} + (\cos t)\overline{b}$, där $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbf{R}^2$ är obekanta vektorer.

Kursprovet: måndag 2.5 kl 13-15 i Exaktum (samtidigt kursprov i kursen *Geometri*). Alternativt provtillfälle arrangeras vid behov (tag kontakt). *Obs: till kursprovstillfället får ni medta en minneslapp på en (= 1) A4-sida.*

Provområde: non-lineära DE:r av andra ordningen*, lineära DE:r av högre ordning med konstanta koefficienter*, lokala existens- och entydighetssatsen, lineära och non-lineära DE-system av första ordningen, lösning av lineära DE-system med konstanta koefficienter. *Obs: ämnen försedda med * behandlas inte i kompendiet, se kursmappen i rum C326.*

xxxxxxxxx

Differentiaaliyhtälöt II
Harjoitus 6
28.4. 2011

1. Näytä, että matriisi

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$$

on kääntyvä kaikilla $t \in \mathbf{R}$, ja määrää käänteismatriisi $Y(t)^{-1}$.

2. Määrää DY-systeemin

$$y_1'(t) = y_2(t)$$
$$y_2'(t) = y_1(t)$$

se ratkaisu, jolle $(y_1(0), y_2(0)) = (0, 1)$.

3. Ratkaise DY-systeemi

$$\overline{y}'(t) = A\overline{y}(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad \text{missä } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vihje: $r = 3$ on matriisin A kaksoisominaisarvo. Etsi toinen ratkaisufunktio $\overline{y}^2(t) = e^{3t}(\overline{v} + t(A - 3I)\overline{v})$, missä $\overline{v} \in \mathbf{R}^2$ toteuttaa $(A - 3I)^2\overline{v} = \overline{0}$.

4. Ratkaise DY-systeemi

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) &= 5y_1(t) - 3y_2(t) \end{aligned}$$

eliminointimenetelmän avulla.

5. Ratkaise epähomogeeninen lineaarinen DY-systeemi

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) + y_2(t) + e^{-t} \\ y_2'(t) &= y_1(t) + y_2(t) + e^{t} \end{aligned}$$

vakioiden varioinnilla. *Vihje:* vastaava homogeeninen DE-systeemi ratkaistiin tehtävässä 5:1 ja käänteismatriisi $Y(t)^{-1}$ eräälle ratkaisujen perusmatriisille $Y(t)$ laskettiin tehtävässä 6:1.

6. Ratkaise epähomogeeninen lineaarinen DY-systeemi

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) + y_2(t) + \sin t \\ y_2'(t) &= y_1(t) + y_2(t) + \cos t \end{aligned}$$

yritteellä $t \mapsto (\sin t)\overline{a} + (\cos t)\overline{b}$, missä $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbf{R}^2$ ovat tuntemattomia vektoreita.

Kurssikoe: maanantaina 2.5 klo 13-15 Exaktumin saleissa (samalla *Geometrin* kurssikoe). Vaihtoehtoinen koetilaisuus tarvittaessa (ota yhteys luennoijaan). *Huom.: Tenttijällä saa olla käytössään yhden A4-sivun kokoinen muistilappu.*

Koealue: toisen kertaluvun epälineaariset DY:t*, korkeamman kertaluvun lineaariset vakiokertoimiset DY:t*, lokaali olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause, ensimmäisen kertaluvun lineaariset ja epälineaariset DY-systeemit, lineaarisen vakiokertoimisen DY-systeemin ratkaiseminen. *Huom.: tähdellä * varustetut aiheet ei käsitellä monisteessa, vrt. kurssikansiota huoneessa C326.*