Differentialekvationer II
Räkneövning 4 (korrigerad version)
7.4. 2011

1. Bestäm derivatan $\overline{y}'(t)$, då vektorfunktionen $\overline{y}(t)$ definieras av

$$(i)\ \overline{y}(t) = (e^{-2t}, te^t)^T, \quad (ii)\ \overline{y}(t) = (1, e^t \cos t, e^t \sin t)^T.$$

2. Skriv följande lineära DE-system i matrisform:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= ty_1(t) - y_2(t) + e^t y_3(t) + \sin t \\ y_2'(t) &= -y_1(t) + t^2 y_2(t) + 2y_3(t) \\ y_3'(t) &= 2y_1(t) + y_2(t) - t^2 y_3(t). \end{aligned}$$

3. Sök lösningsbanorna $(x(t), y(t))$ i implicit form till systemet

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(1 + x^2 + y^2) \\ y'(t) &= -2x(1 + x^2 + y^2) \end{aligned}$$

genom att substitutera $z(s) = y(x^{-1}(s))$ (se Exempel 5.7 i kompendiet).

4. Låt $t \mapsto \overline{y}(t)$ vara en lösning till det homogena lineära DE-systemet

$$\overline{y}'(t) = A(t)\overline{y}(t)$$

på det öppna intervallet $I \subset \mathbf{R}$. Visa: om $\overline{y}(t_0) \neq \overline{0}$ för något $t_0 \in I$, så är $\overline{y}(t) \neq \overline{0}$ för alla $t \in I$. *Tips:* entydighetssatsen för lineära DE-system.

5. Verifiera att $(\overline{y}^1(t), \overline{y}^2(t))$ är ett fundamentalssystem av lösningar till det homogena systemet

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \overline{y}(t),$$

då $\overline{y}^1(t) = e^{7t}(2, 1)^T$ och $\overline{y}^2(t) = e^{-5t}(-2, 1)^T$.

6. Verifiera att $(\overline{y}^1(t), \overline{y}^2(t), \overline{y}^3(t))$ är ett fundamentalssystem av lösningar till det homogena systemet

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overline{y}(t),$$

då $\overline{y}^1(t) = e^t(1, 0, -1)^T$, $\overline{y}^2(t) = e^{2t}(1, -1, -1)^T$ och $\overline{y}^3(t) = e^{-t}(1, 2, -7)^T$.

Förslag: **Kursprovet** ordnas måndag 2.5 kl 13-15 (samtidigt kursprov i kursen *Geometri*). Alternativt provtillfälle arrangeras vid behov (tag kontakt).

Differentiaaliyhtälöt II
Harjoitus 4 (korjattu versio)
7.4. 2011

1. Määrää vektorifunktion $\overline{y}(t)$ derivaatta $\overline{y}'(t)$, kun

$$(i)\ \overline{y}(t) = (e^{-2t}, te^t)^T, \quad (ii)\ \overline{y}(t) = (1, e^t \cos t, e^t \sin t)^T.$$

2. Esitä seuraava lineaarinen DY-systeemi matriisimuodossa:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= ty_1(t) - y_2(t) + e^t y_3(t) + \sin t \\ y_2'(t) &= -y_1(t) + t^2 y_2(t) + 2y_3(t) \\ y_3'(t) &= 2y_1(t) + y_2(t) - t^2 y_3(t). \end{aligned}$$

3. Etsi ratkaisuradat $(x(t), y(t))$ implisiittisessa muodossa DY-systeemille

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(1 + x^2 + y^2) \\ y'(t) &= -2x(1 + x^2 + y^2) \end{aligned}$$

sijoittamalla $z(s) = y(x^{-1}(s))$ (vrt. monisteen Esimerkki 5.7).

4. Olkoon $t \mapsto \overline{y}(t)$ homogeenisen lineaarisen DY-systeemin

$$\overline{y}'(t) = A(t)\overline{y}(t)$$

rakaisu avoimella välillä $I \subset \mathbf{R}$. Näytä: jos $\overline{y}(t_0) \neq \overline{0}$ jollakin $t_0 \in I$, niin $\overline{y}(t) \neq \overline{0}$ kaikilla $t \in I$. *Vihje:* lineaarisen DY-systeemin yksikäsitteisyystulos.

5. Totea, että $(\overline{y}^1(t), \overline{y}^2(t))$ muodostaa homogeenisen systeemin

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \overline{y}(t),$$

ratkaisujen perusjärjestelmän kun $\overline{y}^1(t) = e^{7t}(2,1)^T$ ja $\overline{y}^2(t) = e^{-5t}(-2,1)^T$.

6. Olkoon $\overline{y}^1(t) = e^t(1,0,-1)^T$, $\overline{y}^2(t) = e^{2t}(1,-1,-1)^T$ ja $\overline{y}^3(t) = e^{-t}(1,2,-7)^T$. Totea, että $(\overline{y}^1(t), \overline{y}^2(t), \overline{y}^3(t))$ on ratkaisujen perusjärjestelmä homogeeniselle DY-systeemille

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overline{y}(t).$$

Ehdotus: **Kurssikoe** järjestetään maanantaina 2.5 klo 13-15 (samalla *Geometrin* kurssikoe). Vaihtoehtoinen koetilaisuus tarvittaessa (ota yhteys luennoijaan).