Differentialekvationer II
Räkneövning 3
31.3. 2011

1. Reducera differentialekvationen

$$y^{(4)} - 8y'' + 16y = \sin x$$

till ett 1. ordningens system i matrisformen med 4 obekanta funktioner.

2. Låt $V(x, y) = \delta \log(x) - cx + r \log(y) - by$ utgöra funktionen i den implicita lösningen av Lotka-Volterras system. Verifiera att $u(t) = V(\frac{\delta}{c}t, \frac{r}{b}t)$ är en strängt växande funktion av $t \in (0, 1)$ samt att $\lim_{t \to 0^+} u(t) = -\infty$. *Tips*: undersök $u'(t)$.

3. Låt $T > 0$ vara perioden av lösningsparet $(x(t), y(t))$ till Lotka-Volterras system, dvs. $x(T) = x(0)$ och $y(T) = y(0)$. Visa att medeltalen

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t)dt = \frac{\delta}{c}, \quad \frac{1}{T} \int_0^T y(t)dt = \frac{r}{b},$$

där $(\frac{\delta}{c}, \frac{r}{b})$ är jämviktslösningen till systemet. *Kommentar*: avsikten är att arbeta igenom detaljerna till uträkningen på sida 34 (kompendiet kapitel 2.2.3).

4. Sök jämviktslösningarna (x_0, y_0) till det autonoma systemet

$$\begin{aligned} x'(t) &= \cos(y(t)) \\ y'(t) &= \sin(x(t)) - 1. \end{aligned}$$

5. Visa att $(0, 0)$ utgör enda jämviktslösningen till det lineära systemet

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + by(t) \\ y'(t) &= cx(t) + dy(t) \end{aligned}$$

om $ad - bc \neq 0$. (Kom ihåg: $ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.)

6. Verifiera att $x(t) = e^{-t} \cos t$, $y(t) = e^{-t} \sin t$ löser systemet

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) - y(t) \\ y'(t) &= x(t) - y(t) \end{aligned}$$

då $t \in \mathbf{R}$. Vad händer med lösningsbanan $(x(t), y(t))$ då $t \to \infty$?

Differentiaaliyhtälöt II
Harjoitus 3
31.3. 2011

1. Palauta differentiaaliyhtälö

$$y^{(4)} - 8y'' + 16y = \sin x$$

matriisimuotoiseksi 4:n tuntemattoman funktion 1. kertaluvun systeemiksi.

2. Olkoon $V(x, y) = \delta \log(x) - cx + r \log(y) - by$ Lotka-Volterran systeemin implisiittiratkaisussa esiintyvä funktio. Tarkista että $u(t) = V(\frac{\delta}{c}t, \frac{r}{b}t)$ on aidosti kasvava kun $t \in (0, 1)$, sekä $\lim_{t\to 0^+} u(t) = -\infty$. *Vihje*: tutki $u'(t)$.

3. Olkoon $T > 0$ Lotka-Volterran systeemin ratkaisuparin $(x(t), y(t))$ jakso, eli $x(T) = x(0)$ ja $y(T) = y(0)$. Näytä, että keskiarvot

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{\delta}{c}, \quad \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt = \frac{r}{b},$$

missä $(\frac{\delta}{c}, \frac{r}{b})$ on systeemin tasapainoratkaisu. *Kommentti*: tehtävän tarkoituksena on käydä läpi monisteen sivun 34 (luku 2.2.3) lasku.

4. Etsi tasapainoratkaisut (x_0, y_0) autonomiselle systeemille

$$\begin{aligned} x'(t) &= \cos(y(t)) \\ y'(t) &= \sin(x(t)) - 1. \end{aligned}$$

5. Näytä että $(0, 0)$ on lineaarisen systeemin

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + by(t) \\ y'(t) &= cx(t) + dy(t) \end{aligned}$$

ainoa tasapainoratkaisu jos $ad - bc \neq 0$. (Muistutus: $ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.)

6. Tarkista että $x(t) = e^{-t}\cos t$, $y(t) = e^{-t}\sin t$ on ratkaisu systeemille

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) - y(t) \\ y'(t) &= x(t) - y(t) \end{aligned}$$

kun $t \in \mathbf{R}$. Mitä tapahtuu ratkaisuradalle $(x(t), y(t))$ kun $t \to \infty$?