Differentialekvationer II
Räkneövning 1
17.3. 2011

Obs. I början av vecka 11 går jag igenom några exempel som **inte** finns i kompendiet: icke-lineära 2. ordningens differentialekvationer och homogena lineära differentialekvationer av högre ordning med konstanta koefficienter, samt lineära differensekvationer. Kopior av anteckningarna finns i rum C326.

1. Lös differentialekvationen

$$y'' = (y')^2$$

med substitutionen $y'(x) = z(x)$.

2. Lös initialvärdesproblemet

$$y'' = e^{2y}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1,$$

genom att först lösa $z = z(t)$ från $z' = \frac{f(t,z)}{z}$, där $f(y, y') = e^{2y}$, och därefter $y = y(x)$ från $y'(x) = z(y(x))$.

3. Sök alla lösningar till differentialekvationen

$$y^{(4)} - y = 0.$$

4. Bilda motsvarigheten till Binets formel för de sk. Lucas talen y_n, $n \in \mathbf{N}$, som satisfierar differensekvationen

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n, \quad y_0 = 2, y_1 = 1.$$

Tips: samma försök $y_n = r^n$, $n \in \mathbf{N}$, som för Fibonacci talen.

5. (i) Anta att $r_0 \in \mathbf{R}$ är en dubbelrot till ekvationen $r^2+ar+b = 0$. Verifiera att $x_n = C_1 r_0^n + C_2 n r_0^n$, $n \in \mathbf{N}$, löser differensekvationen $x_{n+2}+ax_{n+1}+bx_n = 0$ för alla konstanter $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$. [Notera: $r_0 = -a/2, b = a^2/4$.]
(ii) Bilda en formel för den lösning till $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$ för vilken $x_0 = 1, x_1 = 2$.

6. Anta att $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är godtyckliga två gånger deriverbara funktioner i $\mathbb{R}$. Verifiera att funktionen $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, där $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$, löser *vågekvationen*

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad c > 0 \text{ konstant.}$$

Differentiaaliyhtälöt II
Harjoitus 1
17.3. 2011

Huom. Viikon 11 alussa käsittelen joitakin esimerkkejä jotka **eivät** löydy kurssimonisteesta: epälineaarisia 2. kertaluvun differentiaaliyhtälöitä ja homogeenisia lineaarisia vakiokertoimisia korkeamman kertaluvun differentiaaliyhtälöitä, sekä lineaarisia differenssiyhtälöitä. Luentomuistiinpanot löytyvät huoneesta C326.

1. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' = (y')^2$$

sijoituksella $y'(x) = z(x)$.

2. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$y'' = e^{2y}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1,$$

ratkaisemalla ensin $z = z(t)$ yhtälöstä $z' = \frac{f(t,z)}{z}$, missä $f(y, y') = e^{2y}$, ja tämän jälkeen $y = y(x)$ yhtälöstä $y'(x) = z(y(x))$.

3. Etsi kaikki ratkaisut differentiaaliyhtälölle

$$y^{(4)} - y = 0.$$

4. Muodosta Binet'in kaavan vastine ns. Lucasin luvuille y_n, $n \in \mathbf{N}$, jotka toteuttavat differenssiyhtälön

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n, \quad y_0 = 2, y_1 = 1.$$

Vihje: sama yrite $y_n = r^n$, $n \in \mathbf{N}$, kuin Fibonaccin lukujen tapauksessa.

5. (i) Oletamme että $r_0 \in \mathbf{R}$ on yhtälön $r^2 + ar + b = 0$ kaksoisjuuri. Tarkista että $x_n = C_1 r_0^n + C_2 n r_0^n$, $n \in \mathbf{N}$, on differenssiyhtälön $x_{n+2} + a x_{n+1} + b x_n = 0$ ratkaisu kaikilla vakioilla $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$. [Muistutus: $r_0 = -a/2, b = a^2/4$.]
(ii) Muodosta kaava differenssiyhtälön $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$ ratkaisulle, jolle $x_0 = 1, x_1 = 2$.

6. Oleta että $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ovat mielivaltaisia kahdesti derivoituvia funktioita koko $\mathbb{R}$:ssä. Totea että funktio $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $u(x,t) = f(x + ct) + g(x - ct)$, ratkaisee *aaltoyhtälön*

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad c > 0 \text{ vakio.}$$