Differentialekvationer II
Extra kursprov 9.5. 2011

Obs. *I kursprovet får ni ha med en minneslapp på en (1) A4-sida.*

1. Sök alla lösningar $y = y(x)$ till differentialekvationen

$$y'''' - 2y'' + y = 0$$

med hjälp av försöket $y(x) = e^{rx}$, där r är en konstant.

2. Undersök om vektorfunktionerna $\{\overline{y}^1(t), \overline{y}^2(t)\}$ bildar ett fundamentalsystem av lösningar till systemet

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} \overline{y}(t), \quad t \in (0, \infty),$$

av differentialekvationer, då $\overline{y}^1(t) = (t, 1)^T$, $\overline{y}^2(t) = (t^2, 2t)^T$.

3. Sök den lösning $\overline{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ som satisfierar initialvärdesproblemet

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_2(t) \\ y_2'(t) &= -2y_1(t), \end{aligned}$$

där $(y_1(0), y_2(0)) = (1, 1)$.

4. Bestäm alla lösningar $\overline{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ till det fullständiga differentialekvationssystemet

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \overline{y}(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

Tips: det lönar sig att söka en viss lösning $\overline{y}^0(t)$ till det fullständiga systemet i formen $\overline{y}^0(t) = e^t \overline{a}$, där $\overline{a} \in \mathbf{R}^2$ är en okänd vektor.