Differentialekvationer II
Kursprov 2.5. 2011

Obs. *I kursprovet får ni ha med en minneslapp på en (1) A4-sida.*

1. Sök alla lösningar $y = y(x)$ till differentialekvationen

$$y'''' - 4y'' + 4y = 0$$

med hjälp av försöket $y(x) = e^{rx}$, där r är en konstant.

2. Visa att vektorfunktionerna $\overline{y}^1(t) = (t, 1)^T$, $\overline{y}^2(t) = (te^t, 2e^t)^T$ löser systemet

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1-t}{t} & t \\ -\frac{2}{t} & 2 \end{pmatrix} \overline{y}(t), \quad t \in (0, \infty),$$

samt att $\{\overline{y}^1(t), \overline{y}^2(t)\}$ bildar ett fundamentalsystem till ovanstående system.

3. Sök den lösning $\overline{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ som satisfierar initialvärdesproblemet

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t), \end{aligned}$$

där $(y_1(0), y_2(0)) = (1, 1)$.

4. Bestäm alla lösningar $\overline{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ till det fullständiga differentialekvationssystemet

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \overline{y}(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

Tips: det lönar sig att söka en viss lösning $\overline{y}^0(t)$ till det fullständiga systemet i formen $\overline{y}^0(t) = e^t \overline{a}$, där $\overline{a} \in \mathbf{R}^2$ är en okänd vektor.

KÄÄNNÄ!

Differentiaaliyhtälöt II
Kurssikoe 2.5. 2011

Huom. *Tenttijällä saa koetilaisuudessa olla käytössään yhden A4-sivun kokoinen muistilappu.*

1. Etsi differentiaaliyhtälön

$$y'''' - 4y'' + 4y = 0$$

kaikki ratkaisut yritteen $y(x) = e^{rx}$ avulla, missä r on vakio.

2. Näytä, että vektorifunktiot $\overline{y}^1(t) = (t, 1)^T$, $\overline{y}^2(t) = (te^t, 2e^t)^T$ ovat systeemin

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1-t}{t} & t \\ -\frac{2}{t} & 2 \end{pmatrix} \overline{y}(t), \quad t \in (0, \infty),$$

ratkaisuja, ja että $\{\overline{y}^1(t), \overline{y}^2(t)\}$ on systeemin eräs perusjärjestelmä.

3. Etsi se ratkaisu $\overline{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ joka toteuttaa alkuarvo-ongelman

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t), \end{aligned}$$

missä $(y_1(0), y_2(0)) = (1, 1)$.

4. Määrää täydellisen systeemin

$$\overline{y}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \overline{y}(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

kaikki ratkaisut $\overline{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$. *Vihje:* kannattaa etsiä täydellisen systeemin eräs ratkaisu $\overline{y}^0(t)$ muodossa $\overline{y}^0(t) = e^t\overline{a}$, missä $\overline{a} \in \mathbf{R}^2$ on tuntematon vektori.

VÄND!