① Olkoon $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = x^3y + 4x^2y^3 - x^5 - 4$. Tällöin tehtävän yhtälö on $F(x,y) = 0$. Osittaisderivaatat

$$D_1F(x,y) = 3x^2y + 8xy^3 - 5x^4 \quad \text{ja}$$
$$D_2F(x,y) = x^3 + 12x^2y^2$$

ovat jatkuvia eli F on jatkuvasti derivoituva, koska lisäksi $F(1,1) = 0$ ja

$$D_2F(1,1) = 1+12 = 13 \neq 0,$$

niin Lauseen 3.50 perusteella yhtälö $F(x,y)=0$ määrittelee pisteen $(1,1)$ kyllin pienessä ympäristössä y:n muuttujan x funktiona. Merkitään tätä funktiota $f(x)$:llä. Lauseen 3.50 perusteella $f(x)$ on jatkuvasti derivoituva ja

$$f'(x) = -\frac{D_1F(x,f(x))}{D_2F(x,f(x))} = -\frac{3x^2f(x) + 8x(f(x))^3 - 5x^4}{x^3 + 12x^2(f(x))^2}.$$

Sijoittamalla tähän $x=1$ ja $f(1)=1$, saadaan

$$f'(1) = -\frac{3+8-5}{1+12} = -\frac{6}{13},$$

joka on tehtävän käyrän pisteeseen $(1,1)$ piirretyn tangentin kulmakerroin. Siten tämän tangentin yhtälö on

$$y-1 = f'(1)(x-1) \iff y-1 = -\frac{6}{13}(x-1) \iff$$
$$y = -\frac{6}{13}x + \frac{19}{13}.$$

② Olkoon $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = x^2yz + xz^3 + y^2z^2 - 1$. Tällöin tehtävän yhtälö on $F(x,y,z)=0$. Osittaisderivaatat

$$D_1F(x,y,z) = 2xyz + z^3,$$
$$D_2F(x,y,z) = x^2z + 2yz^2 \quad \text{ja}$$
$$D_3F(x,y,z) = x^2y + 3xz^2 + 2y^2z$$

ovat jatkuvia eli F on jatkuvasti derivoituva. Koska lisäksi

$F(0,1,1)=0$ ja $D_3F(0,1,1)=2\neq 0$, niin Lauseen 3.50 perusteella yhtälö $F(x,y,z)=0$ määrittelee pisteen $(0,1,1)$ kullin pienessä ympäristössä z:n muuttujien x ja y funktiona. Merkitään tätä funktiota $z(x,y)$:llä. Lauseen 3.50 perusteella $z(x,y)$ on jatkuvasti derivoituva ja

$$D_1z(0,1) = -\frac{D_1F(0,1,1)}{D_3F(0,1,1)} = -\frac{1}{2} \quad \text{sekä}$$

$$D_2z(0,1) = -\frac{D_2F(0,1,1)}{D_3F(0,1,1)} = -\frac{2}{2} = -1.$$

③ (a) $Q(x,y) = 3x^2-6xy+3y^2 = [x\ y]\,A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, missä $A=\begin{bmatrix}3 & -3\\ -3 & 3\end{bmatrix}$

(I) Nyt $d_2 = \det A = \begin{vmatrix}3 & -3\\ -3 & 3\end{vmatrix} = 3^2-(-3)^2 = 0 \not> 0$, joten Lauseen 3.57(i) perusteella A (ja $Q(x,y)$) ei ole positiivisesti definiitti.

(II) $\det A = 0 \geq 0$, $\det[3] = 3 \geq 0$ (A:n 1. rivi ja sarake on jätetty pois) ja $\det[3]=3\geq 0$ (A:n 2. rivi ja sarake on jätetty pois), joten Lauseen 3.57(iii) perusteella A (ja $Q(x,y)$) on positiivisesti semidefiniitti.

(Vaihtoehtoinen ratkaisutapa. $3x^2-6xy+3y^2 = 3(x^2-2xy+y^2) = 3(x-y)^2 \geq 0$ ja tässä pätee yhtäsuuruus esimerkiksi, kun $(x,y)=(1,1)\neq(0,0)$.)

(b) $Q(x,y) = -7x^2-7y^2+8xy = [x\ y]\,A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, missä $A=\begin{bmatrix}-7 & 4\\ 4 & -7\end{bmatrix}$.

Nyt $-A=\begin{bmatrix}7 & -4\\ -4 & 7\end{bmatrix}$ ja tämän matriisin johtavat alideterminantit ovat

$$d_1 = 7>0 \quad \text{sekä} \quad d_2 = \det(-A) = \begin{vmatrix}7 & -4\\ -4 & 7\end{vmatrix} = 7^2-(-4)^2 = 33>0,$$

joten Lauseen 3.57 kohtien (ii) ja (i) perusteella A (ja $Q(x,y)$) on negatiivisesti definiitti.

(Vaihtoehtoinen ratkaisutapa. $-7x^2-7y^2+8xy = -7(x^2+y^2-\frac{8}{7}xy) = -7(x^2+(y-\frac{4}{7}x)^2-(\frac{4}{7})^2x^2) = -7(\underbrace{\tfrac{33}{49}x^2}_{\geq 0}+\underbrace{(y-\tfrac{4}{7}x)^2}_{\geq 0}) \leq 0$ ja tässä pätee yhtäsuuruus vain, kun $(x,y)=(0,0)$.)

(C) $Q(x,y,z) = -7x^2 - 7y^2 - 10z^2 + 8xy + 16xz - 16yz = [x\ y\ z] A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$,
missä
$$A = \begin{bmatrix} -7 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & -8 \\ 8 & -8 & -10 \end{bmatrix}.$$

(I) $d_1 = -7 \neq 0$, joten Lauseen 3.57(i) perusteella A (ja $Q(x,y,z)$) ei ole positiivisesti definiitti.

(II) $\det[-7] = -7 \neq 0$ (A:sta on jätetty pois 2. rivi ja sarake sekä 3. rivi ja sarake), joten Lauseen 3.57(iii) perusteella A (ja $Q(x,y,z)$) ei ole positiivisesti semidefiniitti

(III) $\det(-A) = \begin{vmatrix} 7 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & 8 \\ -8 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} -4 & 8 \\ -8 & 10 \end{vmatrix} + (-8)\begin{vmatrix} -4 & 7 \\ -8 & 8 \end{vmatrix} =$

$7(7\cdot 10 - 8^2) + 4((-4)\cdot 10 - (-8)\cdot 8) - 8((-4)\cdot 8 - (-8)\cdot 7) = 7(70-64) + 4(-40+64) -$
$8(-32+56) = 7\cdot 6 + 4\cdot 24 - 8\cdot 24 = 42 + 96 - 192 = -54 \neq 0$,

joten Lauseen 3.57 kohtien (ii) ja (i) perusteella A (ja $Q(x,y,z)$) ei ole negatiivisesti definiitti.

(IV) $\det(-A) = -54 \neq 0$, joten Lauseen 3.57 kohtien (iv) ja (iii) perusteella A (ja $Q(x,y,z)$) ei ole negatiivisesti semidefiniitti.

Siis A (ja $Q(x,y,z)$) on indefiniitti.

(Vaihtoehtoinen ratkaisutapa. Esimerkiksi $Q(1,0,0) = -7 < 0$ ja $Q(1,-1,2) = 2 > 0$, joten $Q(x,y,z)$ on indefiniitti.)

(4) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$ (katso määritelmä 3.1). Tässä tapauksessa ei voida soveltaa Lausetta 4.12, sillä f:llä ei ole osittaisderivaattoja pisteessä $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$.

1° $\mathbb{R}^n$ on konveksi, sillä se sisältää kaikkien pisteidensä väliset janat eli kaikilla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ja kaikilla $t \in [0,1]$: $(1-t)x_1 + tx_2 \in \mathbb{R}^n$.

2° Kaikilla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ja kaikille $t \in]0,1[$:

$$f((1-t)x_1 + tx_2) = \|(1-t)x_1 + tx_2\| \overset{(*)}{\leq} \|(1-t)x_1\| + \|tx_2\| \overset{(**)}{=} |1-t|\|x_1\| +$$
$$|t|\|x_2\| = (1-t)\|x_1\| + t\|x_2\| = (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

(*) Kolmioepäyhtälö $\mathbb{R}^n$:ssä eli Lause 3.2 (iii). Verkkomonisteessa on tässä kohtaa painovirhe. Siellä pitäisi olla $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, ei $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.
(**) Lause 3.2 (ii): $\|ax\| = |a|\|x\|$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$ ja $x \in \mathbb{R}^n$.

kohtien 1° ja 2° perusteella $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on konveksi.

(5) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = -x^4 - 3y^4 - 12x + 5y$.

$D_1f(x,y) = -4x^3 - 12$,
$D_{11}f(x,y) = -12x^2$,
$D_{12}f(x,y) = D_{21}f(x,y) = 0$,
$D_2f(x,y) = -12y^3 + 5$ ja
$D_{22}f(x,y) = -36y^2$.

Funktion f Hessen matriisi:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} D_{11}f(x,y) & D_{12}f(x,y) \\ D_{21}f(x,y) & D_{22}f(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12x^2 & 0 \\ 0 & -36y^2 \end{bmatrix}.$$

Siis $-H(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 36y^2 \end{bmatrix}$ ja tälle matriisille saadaan:

$\det(-H(x,y)) = 12x^2 36y^2 - 0^2 = 432x^2y^2 \geq 0$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$\det[36y^2] = 36y^2 \geq 0$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ($-H(x,y)$:stä on jätetty pois 1. rivi ja sarake) ja
$\det[12x^2] = 12x^2 \geq 0$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ($-H(x,y)$:stä on jätetty pois 2. rivi ja sarake),

Niinpä Lauseen 4.12(iii) sekä Lauseen 3.57 kohtien (iv) ja (iii) perusteella f on konkaavi $\mathbb{R}^2$:ssa.

(6) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^5 + xy$, ja $A = \{(x,y) \mid x > \frac{1}{120}$ ja $y > 1\}$.

A on konveksi, sillä kun $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in A$ ja $t \in [0,1]$, niin $(1-t)(x_1,y_1) + t(x_2,y_2) = ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) \in A$, koska

$$(1-t)x_1 + tx_2 > (1-t)\tfrac{1}{120} + t\tfrac{1}{120} = \tfrac{1}{120} \quad \text{ja}$$
$$(1-t)y_1 + ty_2 > (1-t)\cdot 1 + t\cdot 1 = 1.$$

Nyt
$D_1f(x,y) = 3x^2 + y$,
$D_{11}f(x,y) = 6x$,
$D_{12}f(x,y) = D_{21}f(x,y) = 1$,
$D_2f(x,y) = 5y^4 + x$ ja
$D_{22}f(x,y) = 20y^3$.

Funktion f Hessen matriisi:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} D_{11}f(x,y) & D_{12}f(x,y) \\ D_{21}f(x,y) & D_{22}f(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 20y^3 \end{bmatrix}.$$

Matriisin $H(x,y)$ johtaville alideterminanteille pätee kaikilla $(x,y) \in A$:

$$d_1 = 6x > \frac{6}{120} > 0 \quad \text{ja} \quad d_2 = \det(H(x,y)) = 120xy^3 - 1$$

$$> 120 \cdot \frac{1}{120} - 1 = 0.$$

Niinpä Lauseiden 4.12(ii) ja 3.57(i) perusteella f on vahvasti konveksi A:ssa.