① (a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{|x+y|}$. Merkitään $A_1 = \{(0,y) \mid y<0\}$ (negatiivinen y-akseli) ja $A_2 = \{(0,y) \mid y>0\}$ (positiivinen y-akseli). Nyt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ (x,y)\in A_1} f(x,y) = \lim_{y\to 0-} f(0,y) = \lim_{y\to 0-} \frac{y}{|y|} = \lim_{y\to 0-} -1 = -1 \quad \text{ja}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ (x,y)\in A_2} f(x,y) = \lim_{y\to 0+} f(0,y) = \lim_{y\to 0+} \frac{y}{|y|} = \lim_{y\to 0+} 1 = 1.$$

Koska nämä raja-arvot ovat eri suuret, raja-arvoa $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ei ole olemassa (seuraus 3.11).

(b) Merkitään $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{|x+y|} + \cos(xy)$. (PAINOVIRHEESTÄ korjatun version ratkaisu on sivulla 4.)

Osoitetaan, että tehtävän raja-arvoa ei ole olemassa. Olkoot $A_1 = \{(x,0) \mid x\in\mathbb{R}\}$ ja $A_2 = \{(x,-x+x^2) \mid x\in\mathbb{R}\}$. Nyt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ (x,y)\in A_1} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{|x|} + \cos(0)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}(|x|+1) = 1 \quad \text{ja}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ (x,y)\in A_2} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,-x+x^2) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+(-x+x^2)^2}{x^2} + \cos(-x^2+x^3)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2(1+(-1+x)^2)}{x^2} + \cos(-x^2+x^3)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+(-1+x)^2 + \cos(-x^2+x^3)\right) = 1+(-1+0)^2+\cos(0) = 3,$$

missä käytettiin mm. tietoa, että cos on jatkuva funktio (syksyn kurssi). Koska nämä raja-arvot ovat eri suuret, raja-arvoa $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ei ole olemassa.

② $f(x,y,z) = \dfrac{e^{xy}}{1+z^2} + \sqrt{x^2+y^2z^2}$. Merkitään $\bar{r} = (x,y,z)$.

(1) Projektiokuvaukset $pr_1(\bar{r}) = x$, $pr_2(\bar{r}) = y$ ja $pr_3(\bar{r}) = z$ on todistettu jatkuviksi Esimerkissä 3.13(iii).

(2) Jatkuvien funktioiden tulo ja summa ovat jatkuvia (Seuraus 3.16). Lisäksi vakiofunktiot ovat jatkuvia. Niinpä kohdasta (1) seuraa, että $pr_1(\bar{r}) \cdot pr_2(\bar{r})$, $1+(pr_3(\bar{r}))^2$ ja $(pr_1(\bar{r}))^2 + (pr_2(\bar{r}))^2 \cdot (pr_3(\bar{r}))^2$ ovat jatkuvia.

(3) Eksponenttifunktio ja neliöjuuri ovat jatkuvia (syksyn kurssi).

(4) Jatkuvista kuvauksista muodostettu yhdistetty kuvaus on jatkuva (Lause 3.21). Niinpä kohdista (2) ja (3) seuraa, että $e^{pr_1(\bar{r}) \cdot pr_2(\bar{r})}$ ja $\sqrt{(pr_1(\bar{r}))^2 + (pr_2(\bar{r}))^2 \cdot (pr_3(\bar{r}))^3}$ ovat jatkuvia.

(5) Jatkuvien funktioiden osamäärä ja summa ovat jatkuvia (Seuraus 3.16), joten kohdista (2) ja (4) seuraa, että

$$f(x,y,z) = \frac{e^{pr_1(\bar{r}) \cdot pr_2(\bar{r})}}{1+(pr_3(\bar{r}))^2} + \sqrt{(pr_1(\bar{r}))^2 + (pr_2(\bar{r}))^2 \cdot (pr_3(\bar{r}))^2}$$

on jatkuva. Lisäksi havaitaan, että f:n määrittelyjoukko on $\mathbb{R}^3$, sillä $1+z^2 \neq 0$ ja $x^2+y^2z^2 \geq 0$ kaikilla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

③ $f(x,y) = (x/y, \sqrt{xy}, \ln y)$. $\ln y$ on määritelty, kun $y>0$. Tällöin myös x/y on määritelty ja $\sqrt{xy}$ on määritelty, kun $x \geq 0$. Siis funktion f määrittelyjoukko on $A = \{(x,y) \mid x \geq 0 \text{ ja } y>0\}$. Sen komponenttifunktiot ovat $f_1 : A \to \mathbb{R}$, $f_1(x,y) = x/y$, $f_2(x,y) = \sqrt{xy}$ ja $f_3 : A \to \mathbb{R}$, $f_3(x,y) = \ln y$.

Funktio $f : A \to \mathbb{R}^3$ on jatkuva, sillä sen komponenttifunktiot ovat jatkuvia (verkkomonisteen sivu 72). Niiden jatkuvuus nähdään samaan tapaan kuin tehtävässä 2: projektiokuvaukset $pr_1(x,y) = x$ ja $pr_2(x,y) = y$ ovat jatkuvia (Esimerkki 3.13(iii)), jatkuvien kuvausten tulo ja osamäärä ovat jatkuvia (Seuraus 3.16), ln on jatkuva (syksyn kurssi) ja jatkuvista kuvauksista saatu yhdistetty kuvaus on jatkuva (Lause 3.21).

(4) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \sin(2x^2+2y^2)/(x^2+y^2), & \text{kun } (x,y) \neq 0, \text{ ja} \\ a, & \text{kun } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Muualla paitsi pisteessä (0,0) funktion f jatkuvuus nähdään samaan tapaan kuin tehtävässä 2. Lauseen 3.14 perusteella f on jatkuva pisteessä (0,0), jos ja vain jos $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. Merkitään $z = 2(x^2+y^2)$. Nyt $(x,y) \to (0,0) \iff z \to 0$, joten

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x^2+2y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z/2} = 2 \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} \overset{(*)}{=} 2.$$

(*) syksyn kurssi.

Niinpä f on jatkuva, jos ja vain jos $a = 2$.

(5) $f(x,y) = (x/y, \sqrt{xy}, \ln y)$. Kun $x>0$ ja $y>0$, saadaan

$D_1 f(x,y) = (D_x \frac{x}{y}, D_x\sqrt{xy}, D_x \ln y) = (\frac{1}{y}, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{xy}}\cdot y, 0) = (\frac{1}{y}, \sqrt{\frac{y}{4x}}, 0)$ ja

$D_2 f(x,y) = (D_y \frac{x}{y}, D_y\sqrt{xy}, D_y \ln y) = (-\frac{x}{y^2}, \sqrt{\frac{x}{4y}}, \frac{1}{y})$.

(6) $f(x,y,z) = \dfrac{xy+3ze^x}{x^2+z^2}$.

$D_1 f(x,y,z) = \dfrac{(y+3ze^x)(x^2+z^2) - 2x(xy+3ze^x)}{(x^2+z^2)^2}$, $D_1 f(0,1,-1) = \dfrac{-2-0}{1} = -2$,

$D_2 f(x,y,z) = \dfrac{x}{x^2+z^2}$, $D_2 f(0,1,-1) = 0$,

$D_3 f(x,y,z) = \dfrac{3e^x(x^2+z^2) - 2z(xy+3ze^x)}{(x^2+z^2)^2}$, $D_3 f(0,1,-1) = \dfrac{3-2\cdot(-1)\cdot(-3)}{1} = -3$,

Siis $\nabla f(0,1,-1) = (-2,0,-3)$.

(1) Tässä on ensimmäisen tehtävän (b)-kohdan painovirheestä korjatun version ratkaisu, missä lasketaan

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} + \cos(xy) \right).$$

$$\left| \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} - 0 \right| = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \leq \frac{|x|^2+2|x||y|+|y|^2}{|x|+|y|} = \frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|}$$

$$= |x|+|y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0+0=0.$$

(Vaihtoehtoinen tapa:

$$\left| \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} - 0 \right| = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \leq \frac{(|x|+|y|)^2+(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|}$$

$$= \frac{2(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|} = 2(|x|+|y|) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.\ )$$

Siis arvaus $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$ todistettiin oikeaksi. Lisäksi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$ ja cos on jatkuva (pisteessä 0, syksyn kurssi), joten $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos(xy) = \cos(0) = 1$. Niinpä

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} + \cos(xy) \right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$$

$$+ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos(xy) = 0+1 = 1.$$