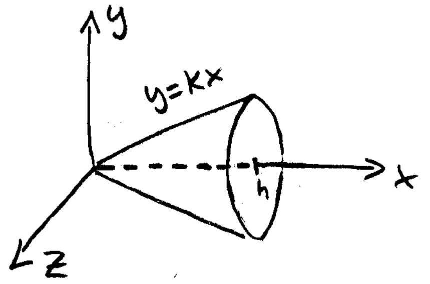
(1)



Lauseen 1.50 perusteella tämän pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$\pi\int_0^h (kx)^2\,dx = \pi k^2 \int_0^h x^2\,dx = \pi k^2 \Big/_0^h \frac{x^3}{3}$$

$= \frac{\pi}{3}k^2h^3$ ja sen vaipan ala on (*)

(2)

$$\int_0^M x e^{-3x}\,dx \overset{\text{os.int.}}{=} \Big/_0^M x\left(-\tfrac{1}{3}e^{-3x}\right) - \int_0^M 1\cdot\left(-\tfrac{1}{3}e^{-3x}\right)dx = -\frac{M}{3}e^{-3M} +$$

$$\int_0^M \frac{1}{3}e^{-3x}\,dx = -\frac{M}{3}e^{-3M} + \Big/_0^M -\frac{1}{9}e^{-3x} =$$

$$-\frac{M}{3}e^{-3M} - \frac{1}{9}e^{-3M} + \frac{1}{9} \xrightarrow[M\to\infty]{} \frac{1}{9},$$

sillä syksyn kurssin Lauseen 7.7 perusteella

$$-\frac{M}{3}e^{-3M} = -\frac{1}{9}\cdot\frac{3M}{e^{3M}} \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$$

ja lisäksi tiedetään, että $\lim_{M\to\infty} e^{-3M} = 0$. Niinpä

$$\int_0^\infty x e^{-3x}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M x e^{-3x}\,dx = \frac{1}{9}.$$

(3) Vihjeen mukaisesti integraatafunktio voidaan kirjoittaa seuraavaan muotoon

$$x^{100}e^{-2x} = (x^{100}e^{-x})\,e^{-x}.$$

Syksyn kurssin Lauseen 7.7 perusteella $\lim_{x\to\infty} x^{100}e^{-x} = 0$. Siksi on olemassa x_0, jolla pätee:

$$x^{100}e^{-x} \le 1 \quad \text{kaikilla } x\in[x_0,\infty[.$$

Tällöin

$$0 \le x^{100}e^{-2x} \le e^{-x} \quad \text{kaikilla } x\in[x_0,\infty[.$$

(*) (Tehtävä 1) $2\pi\int_0^h |kx|\sqrt{1+(D(kx))^2}\,dx = 2\pi\int_0^h kx\sqrt{1+k^2}\,dx$

$= 2\pi k\sqrt{1+k^2}\Big/_0^h \frac{x^2}{2} = \pi h^2 k\sqrt{1+k^2}.$

Koska

$$\int_{x_0}^{M} e^{-x}\,dx = \Big/_{x_0}^{M} -e^{-x} = -e^{-M} + e^{-x_0} \xrightarrow[M\to\infty]{} e^{-x_0},$$

niin epäoleellinen integraali $\int_{x_0}^{\infty} e^{-x}\,dx$ suppenee. Siis $\int_{x_0}^{\infty} x^{100}e^{-2x}\,dx$ suppenee majoranttiperiaatteen mukaan. Niinpä myös epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} x^{100}e^{-2x}\,dx = \int_1^{x_0} x^{100}e^{-2x}\,dx + \int_{x_0}^{\infty} x^{100}e^{-2x}\,dx$$

suppenee.

4 Kaikilla $x \in]0,1]$ pätee $0 < x^3 + x \leq x + x = 2x$, joten tällöin

$$\frac{x^2+1}{x^3+x} \geq \frac{x^2+1}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \geq 0,$$

(Helpommin, mutta vähemmän opettavaisesti:
$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^3+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+1}{x(x^2+1)}\,dx$
$= \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \frac{1}{x}\,dx$
$= \dots = \infty$. Hajaantuu)

Koska

$$\lim_{c\to 0+} \int_c^1 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)dx = \lim_{c\to 0+} \Big/_c^1 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right)$$

$$= \lim_{c\to 0+} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{c^2}{4} - \frac{1}{2}\ln c\right) = \infty,$$

niin epäoleellinen integraali $\int_0^1 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)dx$ hajaantuu. Siksi minoranttiperiaatteen mukaan myös $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^3+x}\,dx$ hajaantuu.

Epäoleellisen integraalin $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$ suppenemisen selvittämiseksi havaitaan ensin, että kaikilla $x \in]1,2]$:

$$0 \leq \frac{x}{\sqrt{x-1}} \leq \frac{2}{\sqrt{x-1}}.$$

Koska

$$\lim_{c\to 1+} \int_c^2 \frac{2}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{c\to 1+} \Big/_c^2 4(x-1)^{\frac{1}{2}} = \lim_{c\to 1+} \left(4 - 4(c-1)^{\frac{1}{2}}\right) = 4,$$

niin epäoleellinen integraali $\int_1^2 \frac{2}{\sqrt{x-1}}\,dx$ suppenee. Niinpä majoranttiperiaatteen mukaan myös $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$ suppenee.

(5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ on tiheysfunktio, jos ja vain jos

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ ja

(2) $f(x) \geq 0$ kaikilla $x\in\mathbb{R}$.

Nyt
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x<1, \text{ ja} \\ ae^{-5x}, & \text{kun } x\geq 1. \end{cases}$$

Ehdon (2) perusteella täytyy olla $a \geq 0$. Lisäksi nyt

$$\int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx = \lim_{m\to-\infty} \int_m^1 0\,dx = \lim_{m\to-\infty} 0 = 0 \quad \text{ja}$$

$$\int_1^M ae^{-5x}\,dx = \Big/_1^M -\frac{a}{5}e^{-5x} = -\frac{a}{5}e^{-5M} + \frac{a}{5}e^{-5} \xrightarrow[M\to\infty]{} \frac{a}{5}e^{-5},$$

joten
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx + \int_1^{\infty} f(x)\,dx = 0 + \frac{a}{5}e^{-5} = \frac{a}{5}e^{-5}.$$

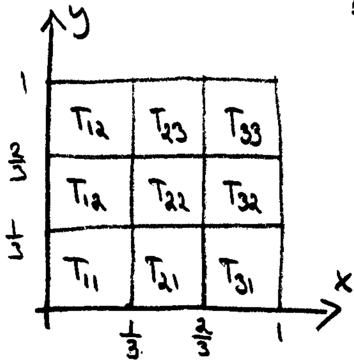
Siis f on tiheysfunktio, jos ja vain jos $a = 5e^5$.

Kun satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on f, niin todennäköisyys, että $0 \leq X \leq 3$, on

$$P(0\leq X\leq 3) = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx + \int_1^3 5e^5 e^{-5x}\,dx$$

$$= \Big/_1^3 -e^5 e^{-5x} = -e^5 e^{-15} + e^5 e^{-5} = 1 - e^{-10}.$$

(6) $A=[0,1]\times[0,1]=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1$ ja $0\le y\le 1\}$ jako $D=\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}\times\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}$. Osasuorakulmio $T_{ij}=[\frac{i-1}{3},\frac{i}{3}]\times[\frac{j-1}{3},\frac{j}{3}]=\{(x,y)\mid \frac{i-1}{3}\le x<\frac{i}{3}$ ja $\frac{j-1}{3}\le y\le\frac{j}{3}\}$, missä $i=1,\dots,3$ ja $j=1,\dots,3$.



Huomataan aluksi, että integroitava funktio $f(x,y)=e^{-x-y}$ pienenee, kun x tai y kasvaa. Siksi muotoa $[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\mid a\le x\le b$ ja $c\le y\le d\}$ olevassa joukossa se saa suurimman arvon pisteessä (a,c) ja pienimmän arvon pisteessä (b,d). Niinpä

$$M_{ij}=\sup(f(T_{ij}))=\sup\{f(x,y)\mid (x,y)\in T_{ij}\}=f\left(\tfrac{i-1}{3},\tfrac{j-1}{3}\right)\text{ ja}$$
$$m_{ij}=\inf(f(T_{ij}))=\inf\{f(x,y)\mid (x,y)\in T_{ij}\}=f\left(\tfrac{i}{3},\tfrac{j}{3}\right),\ i=1,\dots,3\text{ ja }j=1,\dots,3.$$

T_{ij}:n pinta-ala $a_{ij}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ kaikilla $i=1,\dots,3$ ja $j=1,\dots,3$.

Yläsumma:

$$S_D=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}M_{ij}a_{ij}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}M_{ij}\tfrac{1}{9}=\sum_{i=1}^{3}\tfrac{1}{9}(M_{i1}+M_{i2}+M_{i3})$$
$$=\tfrac{1}{9}(M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{31}+M_{32}+M_{33})$$
$$=\tfrac{1}{9}\left(f(0,0)+f(0,\tfrac{1}{3})+f(0,\tfrac{2}{3})+f(\tfrac{1}{3},0)+f(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3})+f(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3})+f(\tfrac{2}{3},0)+f(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3})+f(\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3})\right)$$
$$=\tfrac{1}{9}\left(e^{0}+e^{-1/3}+e^{-2/3}+e^{-1/3}+e^{-2/3}+e^{-3/3}+e^{-2/3}+e^{-3/3}+e^{-4/3}\right)$$
$$=\tfrac{1}{9}\left(1+2e^{-\frac{1}{3}}+3e^{-\frac{2}{3}}+2e^{-1}+e^{-\frac{4}{3}}\right)\approx 0{,}553.$$

Alasumma:

$$s_D=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}m_{ij}a_{ij}=\sum_{i=1}^{3}\tfrac{1}{9}(m_{i1}+m_{i2}+m_{i3})$$
$$=\tfrac{1}{9}(m_{11}+m_{12}+m_{13}+m_{21}+m_{22}+m_{23}+m_{31}+m_{32}+m_{33})$$
$$=\tfrac{1}{9}\left(f(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3})+f(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3})+f(\tfrac{1}{3},\tfrac{3}{3})+f(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3})+f(\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3})+f(\tfrac{2}{3},\tfrac{3}{3})+f(\tfrac{3}{3},\tfrac{1}{3})+f(\tfrac{3}{3},\tfrac{2}{3})+f(\tfrac{3}{3},\tfrac{3}{3})\right)$$
$$=\tfrac{1}{9}\left(e^{-2/3}+e^{-3/3}+e^{-4/3}+e^{-3/3}+e^{-4/3}+e^{-5/3}+e^{-4/3}+e^{-5/3}+e^{-6/3}\right)$$
$$=\tfrac{1}{9}\left(e^{-\frac{2}{3}}+2e^{-1}+3e^{-\frac{4}{3}}+2e^{-\frac{5}{3}}+e^{-2}\right)\approx 0{,}284.$$

Näistä saadaan arvio

$$0{,}28<s_D\le\iint_A e^{-x-y}\,dx\,dy\le S_D<0{,}56$$