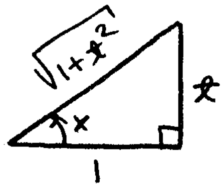
Matemaattisen analyysin jatkokurssi, harj. 3, 12.2.2010, ratkaisuja.

1. Sijoitetaan $\tan x = t$, jolloin $x = \arctan t$ ja $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$.
Lisäksi seuraavasta kuvasta nähdään



$$\left(\tan x = \frac{t}{1} = t\right)$$

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \text{ ja } \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \text{ ja } \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$\left(t \geq 0, \text{ kun } x \in [0, \pi/2[, \text{ ja } t < 0, \text{ kun } x \in]-\pi/2, 0[\right)$

Integroimisrajat:

x	t
$-\pi/4$	$\tan(-\pi/4) = -1$
$\pi/4$	$\tan(\pi/4) = 1$

Siis

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{4\cos^2 x - \sin^2 x}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\frac{4}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4-t^2}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{-1}{(t+2)(t-2)}\,dt.$$

osamurtokehitelmä:

$$\frac{-1}{(t+2)(t-2)} \equiv \frac{{}^{t-2)}A}{t+2} + \frac{{}^{t+2)}B}{t-2} \Leftrightarrow$$

$$-1 \equiv A(t-2) + B(t+2) \Leftrightarrow -1 \equiv (A+B)t + (-2A+2B) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+2B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 4B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B=\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Siis

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(t+2)(t-2)}\,dt = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t+2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t-2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{4} \Big/_{-1}^{1} \left(\ln|t+2| - \ln|t-2|\right) = \frac{1}{4}\left(\ln 3 - \ln 1 - \ln 1 + \ln 3\right)$$

$$= \frac{\ln 3}{2}.$$

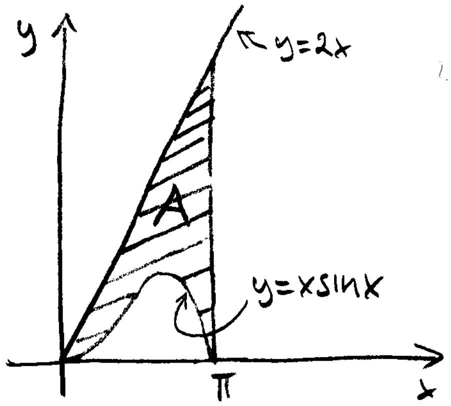
(2) Selvitetään ensin käyrien $y = x\sin x$ ja $y = 2x$ leikkauspisteet:

$$x\sin x = 2x \Leftrightarrow x\sin x - 2x = 0 \Leftrightarrow x(\underbrace{\sin x - 2}_{\neq 0}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0,$$

Lisäksi $x\sin x \leq 2x$ kaikilla $x \in [0, \pi]$, siis kysytty ala

$$A = \int_0^{\pi} (2x - x\sin x)\,dx.$$



Nyt

$$\int_0^{\pi} 2x\,dx = \Big/_{0}^{\pi} x^2 = \pi^2 \quad \text{ja}$$

$$\int_0^{\pi} x\cdot\sin x\,dx \overset{\text{os. int.}}{=} \Big/_{0}^{\pi} x\cdot(-\cos x) - \int_0^{\pi} 1\cdot(-\cos x)\,dx$$

$$= \pi + \int_0^{\pi} \cos x\,dx = \pi + \Big/_{0}^{\pi} \sin x$$

$$= \pi + \sin\pi - \sin 0 = \pi,$$

joten

$$A = \pi^2 - \pi.$$

(3) (a) Koska integroitava funktio $g(t) = e^{t^4}$ on jatkuva, sillä on integraalilaskennan päälauseen (Lause 1.38) perusteella integraalifunktio $G(t)$ (eli sellainen funktio, jonka derivaatta on $g(t)$). Lisäksi Lauseen 1.39 perusteella

$$f(x) = \int_x^{2x} e^{t^4}\,dt = \Big/_{x}^{2x} G(t) = G(2x) - G(x).$$

(Lauseen 1.39 muotoilussa oletetaan, että integroinnin yläraja on suurempi kuin alaraja, mutta vastaava toimii yleisesti. Tämä nähdään seuraavasti. Oletetaan, että $a > b$, jolloin

$$\int_a^b g(t)\,dt = -\int_b^a g(t)\,dt = -\Big/_{b}^{a} G(t) = -G(a) + G(b) = \Big/_{a}^{b} G(t).)$$

Niinpä

$$f'(x) = G'(2x)D(2x) - G'(x) = g(2x)2 - g(x)$$
$$= 2e^{16x^4} - e^{x^4} = \underbrace{(2e^{15x^4} - 1)}_{>0} \underbrace{e^{x^4}}_{>0} > 0$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$, sillä $x^4 \geq 0$, joten $2e^{15x^4} \geq 2$. Siis $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten f on aidosti kasvava kaikkialla.

(b) Koska integroitava funktio $g(t) = (\sin(\frac{\pi t}{2}))^{-1}$ on jatkuva integrointivälillä (välillä $[1, x]$, jos $1 < x < 2$), sillä on integraalilaskennan päälauseen (Lause 1.38) perusteella tällä välillä integraalifunktio $G(t)$. Kuten (a)-kohdassa:

$$f(x) = \int_x^1 (\sin(\tfrac{\pi t}{2}))^{-1}\, dt = G(1) - G(x).$$

Siis

$$f'(x) = -G'(x) = -g(x) = -(\sin(\tfrac{\pi x}{2}))^{-1} < 0$$

kaikilla $x \in]0,2[$, joten f on aidosti vähenevä välillä $]0,2[$.

(4) Sijoitetaan $t = \sqrt{x+1}$, jolloin $t^2 = x+1$, $x = t^2 - 1$ ja $dx = 2t\,dt$. Rajat:

x	t
0	1
8	$\sqrt{8+1} = 3$

$$\int_0^8 \frac{\sin\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\, dx = \int_1^3 \frac{\sin t}{t} 2t\,dt = \int_1^3 2\sin t\, dt$$

$$= \Big/_1^3 -2\cos t = 2\cos 1 - 2\cos 3$$

Jälkimmäinen integraali on verkkomonisteen luvun 1.18 tyyppiä (1.19). Sijoitetaan $t = \sqrt[3]{x+1}$, jolloin $t^3 = x+1$, $x = t^3 - 1$ ja $dx = 3t^2 dt$. Rajat:

x	t
-1	0
0	1

$$\int_{-1}^{0} x\sqrt[3]{x+1}\,dx = \int_0^1 (t^3-1)\,t\,3t^2\,dt = 3\int_0^1 (t^6-t^3)\,dt$$

$$= 3\Big/_0^1\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right) = 3\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right) = 3\left(\frac{4}{28}-\frac{7}{28}\right) = -\frac{9}{28}.$$

5. $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$, $n \in \mathbb{N}\ (=\{1,2,\dots\})$. Sijoitetaan $t = \sin x$, jolloin $x = \arcsin t$ ja $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$. Rajat:

x	t
0	0
$\pi/2$	1

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^1 t^n \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

HUOM: tällaisia ns. epäoleellisia integraaleja käsitellään vasta ensi viikon harjoituksissa, siksi laiton vaihtoehtoisen tavan sivulle 6.

$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$, $n \in \mathbb{N}$. Sijoitetaan $t = \cos x$, jolloin $x = \arccos t$ ja $dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$. Rajat:

x	t
0	1
$\pi/2$	0

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \int_1^0 t^n\left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Siis

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Integraalit $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$ ja $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$ voi laskea esimerkiksi edellisen kerran tehtävän 4 avulla, mutta niiden arvot voi nyt päätellä muutenkin:

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{=1}\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx}_{=\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx}$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx,$$

joten

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4} \quad \left(= \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx\right).$$

⑥ Tämä pyörähdyskappaleen tilavuus on Lauseen 1,50 mukaan

$$\pi \int_3^4 (y(x))^2 \, dx = \pi \int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2} \, dx \overset{(*)}{=} \pi \int_3^4 \frac{1}{(x-1)(x-2)} \, dx .$$

(*) $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ tai $x=2$, mistä nähdään: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.

Osamurtokehitelmä:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} \equiv \frac{{}^{x-2)}A}{x-1} + \frac{{}^{x-1)}B}{x-2} \Leftrightarrow$$

$$1 \equiv A(x-2) + B(x-1) \Leftrightarrow$$

$$1 \equiv (A+B)x + (-2A-B) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases} (2) \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B=-1 \\ B=1. \end{cases}$$

Siis

$$\pi \int_3^4 \frac{1}{(x-1)(x-2)} \, dx = \pi \int_3^4 \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) dx$$

$$= \pi \Big/_3^4 \left(-\ln|x-1| + \ln|x-2| \right)$$

$$= \pi \left(-\ln 3 + \ln 2 + \ln 2 - \ln 1 \right) = \pi \ln \frac{2 \cdot 2}{3} = \pi \ln \frac{4}{3} .$$

(5) Koska tehtävän 5 ensimmäisessä ratkaisussa käytettiin epäoleellista integraalia, joka tulee vasta ensi viikon harjoituksiin, tässä on vielä vaihtoehtoinen tapa tehtävän 5 alkuosaan. Lisäksi tämä on muutenkin yksinkertaisempi tapa.

Tehdään integraaliin $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$, $n \in \mathbb{N}$, sijoitus $\pi/2 - x = t$, jolloin $x = \pi/2 - t$ ja $dx = -dt$. Rajat:

x	t
0	$\pi/2$
$\pi/2$	0

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx = \int_{\pi/2}^{0} \sin^n(\pi/2 - t)(-1)\,dt = \int_0^{\pi/2} \sin^n(\pi/2 - t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt,$$

missä käytettiin lopuksi sitä, että $\sin(\pi/2 - t) = \cos(t)$ (syksyn kurssin Lause 7.24 (xii)).

Vielä hieman aikaisemmassa ratkaisussa olleesta integraalista

$$\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Tässä integroitava funktio ei ole rajoitettu integrointivälillä $[0,1]$ eikä se ole edes määritelty päätepisteessä $t=1$. Kyseessä ei siis ole tavallinen määrätty integraali vaan ns. epäoleellinen integraali, jota käsitellään ensi viikon harjoituksissa.